

Terzo appello 2005/2006 - Tema 2

Esercizio 1

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{2y} - 6e^y + 10, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

- i) Esistono valori $y_0 \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione del problema di Cauchy sia costante?
- ii) Determinare la forma implicita della soluzione del problema di Cauchy relativamente al dato iniziale $y_0 = 0$.

Svolgimento

- i) Affinché $y(x) \equiv y_0$ sia soluzione, deve essere

$$e^{2y_0} - 6e^{y_0} + 10 = 0. \quad (1)$$

Poiché per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ vale

$$e^{2y_0} - 6e^{y_0} + 10 = 0 = (e^{y_0} - 3)^2 + 1 > 0,$$

(1) non è mai verificata. Quindi la risposta al quesito è no.

- ii) Separando le variabili si ottiene

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{e^{2y} - 6e^y + 10} = \int_0^x 1 \, dx = x. \quad (2)$$

Calcoliamo il primo integrale per sostituzione, ponendo $t = e^y$:

$$\begin{aligned} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{e^{2y} - 6e^y + 10} &= \int_0^{y(x)} \frac{dy}{e^{2y} - 6e^y + 10} = \int_1^{e^{y(x)}} \frac{1}{t(t^2 - 6t + 10)} \, dt \\ &= \frac{1}{10} \int_1^{e^{y(x)}} \left(\frac{1}{t} - \frac{t-6}{t^2 - 6t + 10} \right) \, dt \\ &= \frac{1}{10} \log |t| \Big|_1^{e^{y(x)}} - \frac{1}{20} \int_1^{e^{y(x)}} \left(\frac{2t-6}{t^2 - 6t + 10} - \frac{6}{t^2 - 6t + 10} \right) \, dt \\ &= \frac{e^{y(x)}}{10} - \frac{1}{20} \log(t^2 - 6t + 10) \Big|_1^{e^{y(x)}} + \frac{3}{10} \int_1^{e^{y(x)}} \frac{1}{(t-3)^2 + 1} \, dt \\ &= \frac{e^{y(x)}}{10} - \frac{1}{20} \log \frac{e^{2y(x)} - 6e^{y(x)} + 10}{5} + \frac{3}{10} \arctan(t-3) \Big|_1^{e^{y(x)}} \\ &= \frac{e^{y(x)}}{10} - \frac{1}{20} \log \frac{e^{2y(x)} - 6e^{y(x)} + 10}{5} + \\ &\quad + \frac{3}{10} \arctan [e^{y(x)} - 3] + \frac{3}{10} \arctan 2. \end{aligned}$$

Sostituendo quanto ottenuto in (2), si ottiene che la forma implicita della soluzione è

$$\frac{e^{y(x)}}{10} - \frac{1}{20} \log \frac{e^{2y(x)} - 6e^{y(x)} + 10}{5} + \frac{3}{10} \arctan [e^{y(x)} - 3] + \frac{3}{10} \arctan 2 = x.$$

Esercizio 2

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log (4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1).$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità e derivabilità, derivata, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Svolgimento

Dominio: Deve essere

$$4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1 > 0,$$

da cui si ottiene che deve essere

$$\sinh x < \frac{1}{4} \quad \text{oppure} \quad \sinh x > 1.$$

Quindi il dominio D di f è

$$D =] -\infty, \operatorname{settsinh}(1/4)[\cup] \operatorname{settsinh} 1, +\infty[.$$

Segno: Si ha

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1 \geq 0.$$

Quindi, essendo $\sinh x > 0$ se e solo se $x > 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) > 0 & \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{oppure} \quad x > \operatorname{settsinh}(5/4), \\ f(x) = 0 & \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \operatorname{settsinh}(5/4), \\ f(x) < 0 & \Leftrightarrow 0 < x < \operatorname{settsinh}(1/4) \quad \text{oppure} \quad \operatorname{settsinh} 1 < x < \operatorname{settsinh}(5/4). \end{aligned}$$

Limiti ed eventuali asintoti: Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \operatorname{settsinh}(1/4)-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\operatorname{settsinh} 1+} f(x) = -\infty,$$

e quindi le rette di equazione $x = \operatorname{settsinh}(1/4)$ e $x = \operatorname{settsinh} 1$ sono asintoti verticali per la funzione. Inoltre, ponendo $t = \sinh x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \log(4t^2 - 5t + 1) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \log(4t^2 - 5t + 1) = +\infty, \end{aligned}$$

da cui si deduce che la funzione non ha asintoti orizzontali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si osservi che, poiché $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1) = \log \left[4 \sinh^2 x \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \right] \\ &= \log(2 \sinh x)^2 + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \\ &= 2 \log |e^x - e^{-x}| + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right). \end{aligned}$$

Da questo, utilizzando il teorema sul limite di una somma, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \log(e^x - e^{-x})}{x} + \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{\log e^x + \log(1 - e^{-2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{\log(1 - e^{-2x})}{x} \right] \\ &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2 \log(e^{-x} - e^x)}{x} + \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{\log e^{-x} + \log(1 - e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{\log(1 - e^{2x})}{x} \right] \\ &= -2. \end{aligned} \tag{3}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \log(e^x - e^{-x}) + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) - 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \log(1 - e^{-2x}) + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \right] \\ &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 \log(e^{-x} - e^x) + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) + 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 \log(1 - e^{2x}) + \log \left(1 - \frac{5}{4 \sinh x} + \frac{1}{4 \sinh^2 x} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Da (3)-(4) si deduce che la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, e che la retta di equazione $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Continuità e derivabilità: La funzione risulta continua e derivabile in D essendo composizione di funzioni continue e derivabili.

Derivata: Calcoliamo la derivata prima di f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1} \cdot (8 \sinh x \cosh x - 5 \cosh x) \\ &= \frac{\cosh x (8 \sinh x - 5)}{4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1}. \end{aligned}$$

Monotonia e punti di estremo: Si osservi che $\cosh x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $4 \sinh^2 x - 5 \sinh x + 1 > 0$ per ogni $x \in D$. Si ottiene che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $8 \sinh x - 5 \geq 0$, cioè se e solo se $x \geq \operatorname{settsinh}(5/8)$. Poiché $\operatorname{settsinh}(5/8) \notin D$ se ne deduce che

1. f è strettamente decrescente in $] -\infty, \operatorname{settsinh}(1/4)[$;
2. f è strettamente crescente in $] \operatorname{settsinh} 1, +\infty[$;
3. f non ha punti di estremo relativo.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

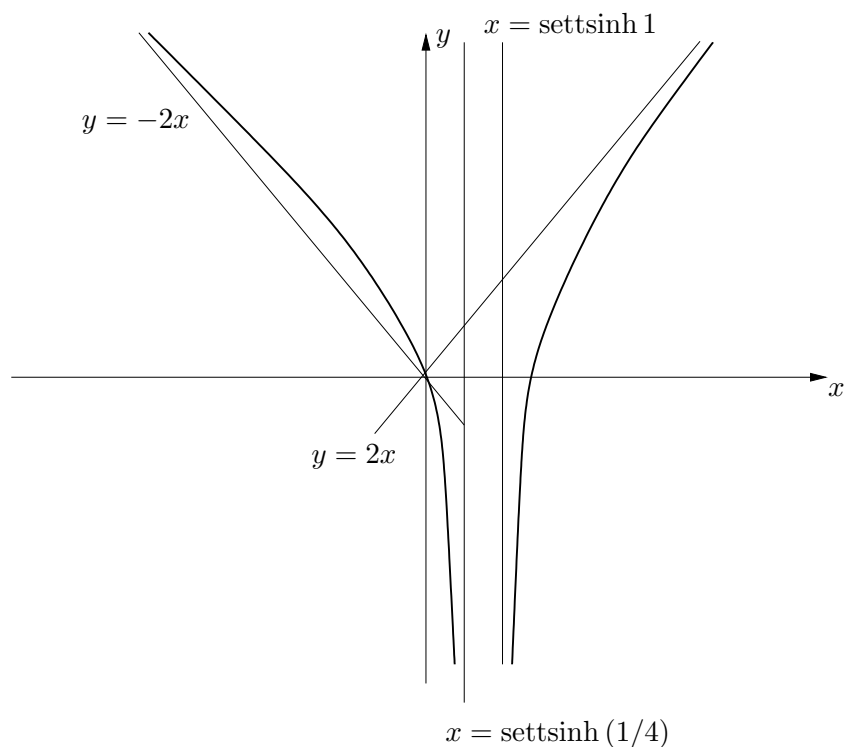


Figura 1: Esercizio 2

Esercizio 3

Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{2}{n^\alpha + 1} \right) \right).$$

Svolgimento

Osserviamo che per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^\alpha + 1} = 0.$$

Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin del coseno, si ottiene

$$1 - \cos\left(\frac{2}{n^\alpha + 1}\right) = 1 - \left[1 - \frac{2}{(n^\alpha + 1)^2} + o(1/n^{3\alpha})\right] = \frac{2}{(n^\alpha + 1)^2} + o(1/n^{3\alpha}).$$

Poiché la serie è a termini positivi, possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2/(n^\alpha + 1)^2 + o(1/n^{3\alpha})}{1/n^{2\alpha}} \stackrel{\text{Pds}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/(n^\alpha + 1)^2}{1/n^{2\alpha}} = 2.$$

Quindi la serie data converge se e solo se converge $\sum_n 1/n^{2\alpha}$, cioè se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4

Calcolare in forma algebrica tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 |z|^3 = iz^2.$$

Svolgimento

Prendendo il modulo di ambo i membri dell'equazione si ottiene

$$|z|^8 = |z|^2,$$

da cui $|z| = 0$ (e quindi $z = 0$), oppure $|z| = 1$. Sostituendo $|z| = 1$ nell'equazione, si ottiene

$$z^5 = iz^2 \quad \Leftrightarrow \quad (z \neq 0) \quad z^3 = i.$$

Si ottiene che bisogna calcolare le radici terze di i . Poiché $z = -i$ lo è, le altre si ottengono facilmente tenendo conto che sul piano di Gauss le radici stanno ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $|i| = 1$. Allora, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$