Quarto appello 2005/2006 - Tema 2

Esercizio 1

Sia x un parametro reale. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log^n(2-x)}{(n+4)^2},$$

1. trovare per quali valori di x la serie converge assolutamente;
2. trovare per quali valori di x la serie converge semplicemente.

Svolgimento

Innanzitutto, si osservi che, affinché il termine generale della serie sia ben definito deve essere $2-x>0$, cioé $x<2$.

1. Studiamo la convergenza assoluta, e quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\big|\log(2-x)\big|^n}{(n+4)^2}.$$

Usiamo il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n\big|\log(2-x)\big|^n}{(n+4)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\big|\log(2-x)\big|}{\sqrt[n]{(n+4)^2}} = \big|\log(2-x)\big|.$$

Distinguiamo tre casi.

(a)

$$\big|\log(2-x)\big| < 1. \qquad (1)$$

In tal caso la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente). Osserviamo che (1) è verificata se e solo se

$$-1 < \log(2-x) < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e} < 2-x < e \qquad \Leftrightarrow \qquad 2-e < x < 2-\frac{1}{e}.$$

Dunque, se $x \in]2-e, 2-1/e[$, la serie converge assolutamente.

(b)

$$\big|\log(2-x)\big| > 1. \qquad (2)$$

In tal caso il termine generale della serie non è infinitesimo, e quindi la serie non può convergere assolutamente. Grazie al lavoro svolto al punto (a), (2) è verificata se e solo se

$$x < 2-e \quad \text{oppure} \quad 2-\frac{1}{e} < x < 2.$$

Dunque, se $x \in]-\infty, 2-e[$ oppure $x \in]2-1/e, 2[$, la serie non converge assolutamente.

(c)
$$\big|\log(2-x)\big| = 1\,. \tag{3}$$
Osserviamo che (3) vale se e solo se $x = 2-e$ oppure $x = 2 - 1/e$. In tal caso la serie dei moduli si riduce a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+4)^2}\,, \tag{4}$$
che è divergente per il criterio asintotico del confronto perché
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n/(n+4)^2}{1/n} = 1\,,$$
e la serie armonica notoriamente diverge.

2. Studiamo la convergenza semplice. Dalla discussione al punto 1., si deduce che

   (a) se $x \in]2-e, 2-1/e[$, la serie converge semplicemente perché converge assolutamente;

   (b) se $x \in]-\infty, 2-e[$ oppure $x \in]2-1/e, 2[$, il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge semplicemente.

   Per $x = 2-e$
   $$\log(2-x) = 1\,,$$
   e la serie si riduce alla serie (4), che abbiamo già osservato essere divergente. Per $x = 2-1/e$, si ottiene
   $$\log(2-x) = -1\,,$$
   e dunque la serie diviene
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+4)^2}\,,$$
   che è una serie a termini di segno alterno. Si osservi che

   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+4)^2} = 0\,;$$

   (b) la successione
   $$n \mapsto \frac{n}{(n+4)^2} \doteq a_n$$
   è definitivamente decrescente. Infatti $a_{n+1} \le a_n$ se e solo se
   $$\frac{n+1}{(n+5)^2} \le \frac{n}{(n+4)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad (n+1)(n+4)^2 \le n(n+5)^2\,,$$
   cioè se e solo se $n^2 + n - 16 \ge 0$, che è verificata per $n \ge 4$.

   Se ne deduce che la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Riassumendo:

- la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, se e solo se $2 - e < x < 2 - 1/e$;
- la serie converge semplicemente, ma non assolutamente, se e solo se $x = 2 - 1/e$;
- se $x \leq 2 - e$ oppure $2 - 1/e < x < 2$, la serie non converge assolutamente né semplicemente.

Esercizio 2

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \arctan \frac{\sqrt{3}(\log x - 1)}{\log x + 1}.$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico; **facoltativo**: studio della derivata seconda]

Svolgimento

Dominio: Deve essere

$$\begin{cases} x > 0\,, \\ \log x + 1 \neq 0\,, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 0 \quad \text{e} \quad x \neq \frac{1}{e}.$$

Quindi il dominio D di f è

$$D =]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[\,.$$

Segno: Poiché $\arctan y \geq 0$ se e solo se $y \geq 0$, si ha

$$f(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\log x - 1}{\log x + 1} \geq 0\,.$$

Poiché

$$\frac{\log x - 1}{\log x + 1} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log x < -1 \quad \text{o} \quad \log x \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x < \frac{1}{e} \quad \text{o} \quad x \geq e\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 0 < x < \frac{1}{e} \quad \text{o} \quad x > e\,, \\ f(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = e\,, \\ f(x) < 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e} < x < e\,. \end{aligned}$$

Limiti ed eventuali asintoti: Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \overset{t=\log x}{=} \lim_{t \to -\infty} \arctan \frac{\sqrt{3}(t-1)}{t+1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Se ne deduce che la funzione f è prolungabile per continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = \pi/3$. D'ora in poi studieremo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{\sqrt{3}(\log x - 1)}{\log x + 1} & \text{se} \quad x \in D,\, x \neq 0\,, \\ \dfrac{\pi}{3} & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$

che ha come dominio l'insieme

$$\widetilde{D} = [0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[\,.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 1/e^-} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x \to 1/e^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

e dunque f non è prolungabile per continuità in $x = 1/e$, né ammette asintoti verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{t = \log x}{=} \lim_{t \to +\infty} \arctan \frac{\sqrt{3}(t-1)}{t+1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\,,$$

da cui si deduce che la retta di equazione $y = \pi/3$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. Non ha senso la ricerca di asintoti obliqui.

Continuità: La funzione prolungata risulta continua in $\widetilde{D}$ essendo composizione e rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo.

Derivabilità: A priori, f è derivabile solo in D, perché in tale insieme f è composizione e rapporto di funzioni. Per $x \in D$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{3}}{1 + 3\dfrac{(\log x - 1)^2}{(\log x + 1)^2}} \cdot \frac{\dfrac{\log x + 1}{x} - \dfrac{\log x - 1}{x}}{(\log x + 1)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{x\big[(\log x + 1)^2 + 3(\log x - 1)^2\big]}\,. \end{aligned}$$

Limiti della derivata prima: Essendo $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log^\alpha x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,,$$

e dunque f non è derivabile in $x = 0$. Inoltre, per $x \to 1/e^\pm$ si ottiene:

$$\lim_{x \to 1/e\pm} f'(x) = 2\sqrt{3} \lim_{x \to 1/e\pm} \frac{1}{x\big[(\log x + 1)^2 + 3(\log x - 1)^2\big]} = \frac{\sqrt{3}}{6} e\,,$$

ma ciononostante f non è derivabile in $x = 1/e$ poiché non è continua in tale punto.

Monotonia e punti di estremo: Poichè $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$, si deduce che

1. f è strettamente crescente in $[0, 1/e[$ e in $]1/e, +\infty[$;

2. f ha un punto di minimo relativo in $x = 0$.

Derivata seconda: Per $x \in D$ si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{2\sqrt{3}}{x^2\left[(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2\right]^2}\cdot \\
&\quad \cdot\left[(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2+2x\left(\frac{\log x+1}{x}+3\frac{\log x-1}{x}\right)\right] \\
&= -2\sqrt{3}\frac{(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2+2(\log x+1)+6(\log x-1)}{x^2\left[(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2\right]^2} \\
&= -2\sqrt{3}\frac{(\log x+1)(\log x+3)+3(\log x-1)(\log x+1)}{x^2\left[(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2\right]^2} \\
&= -8\sqrt{3}\frac{\log x(\log x+1)}{x^2\left[(\log x+1)^2+3(\log x-1)^2\right]^2}\,.
\end{aligned}$$

Si ottiene che, se $x \in D$,

$$f''(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log x(\log x+1) \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < \log x \leq 0\,,$$

cioè se e solo se $1/e < x \leq 1$. Se ne deduce che

1. f è convessa in $]1/e, 1]$;
2. f è concava in $[0, 1/e[$ e in $[1, +\infty[$;
3. f ha un punto di flesso in $x = 1$.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

Esercizio 3

Al variare del parametro $\alpha > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\tan^\alpha x+\sin^4 x}{2x-\sin 2x}\,.$$

Svolgimento

Poiché

$$\tan^\alpha x = x^\alpha + o(x^\alpha)\,, \qquad \sin^4 x = x^4 + o(x^4)\,, \qquad \sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\,,$$

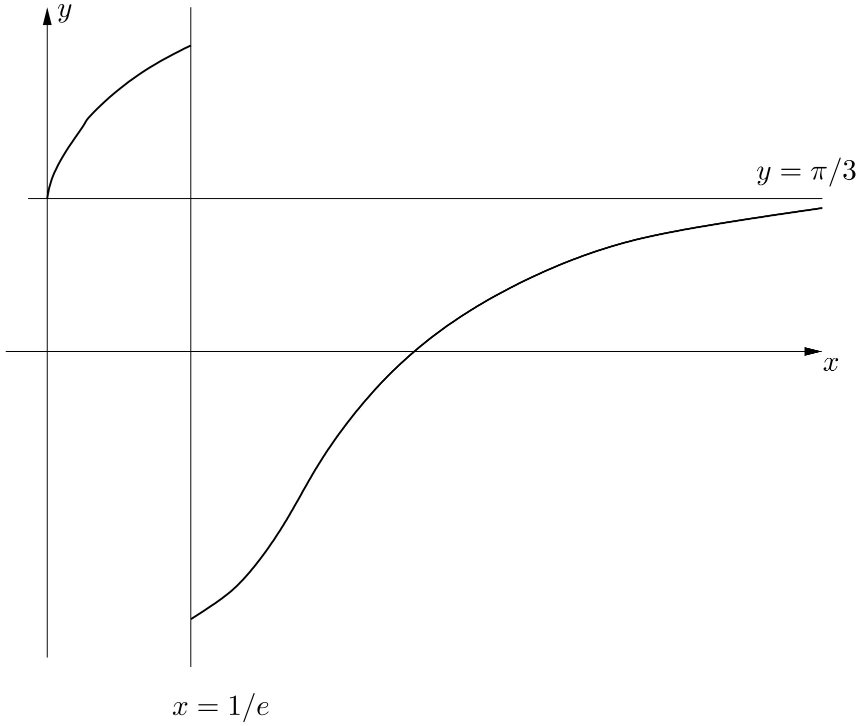

Figura 1: Esercizio 2

usando il teorema sul limite di una somma si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\tan^\alpha x + \sin^4 x}{2x - \sin 2x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) + x^4 + o(x^4)}{4x^3/3 + o(x^4)} \\
&\overset{\text{PdS}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) + x^4 + o(x^4)}{4x^3/3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})}{4x^3/3} + \frac{x^4 + o(x^4)}{4x^3/3}\right] \\
&\overset{\text{PdS}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+2}}{4x^3/3} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha+2<3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha<1\,, \\ 3/4 & \text{se} \quad \alpha+2=3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=1\,, \\ 0 & \text{se} \quad \alpha+2>3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha>1\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S_\alpha \doteq \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z - 1 + i\alpha}{\overline{z} - 1} \in \mathbb{R} \right\} .$$

Svolgimento

Innanzitutto osserviamo che affinché l'espressione

$$\frac{z - 1 + i\alpha}{\overline{z} - 1} \tag{5}$$

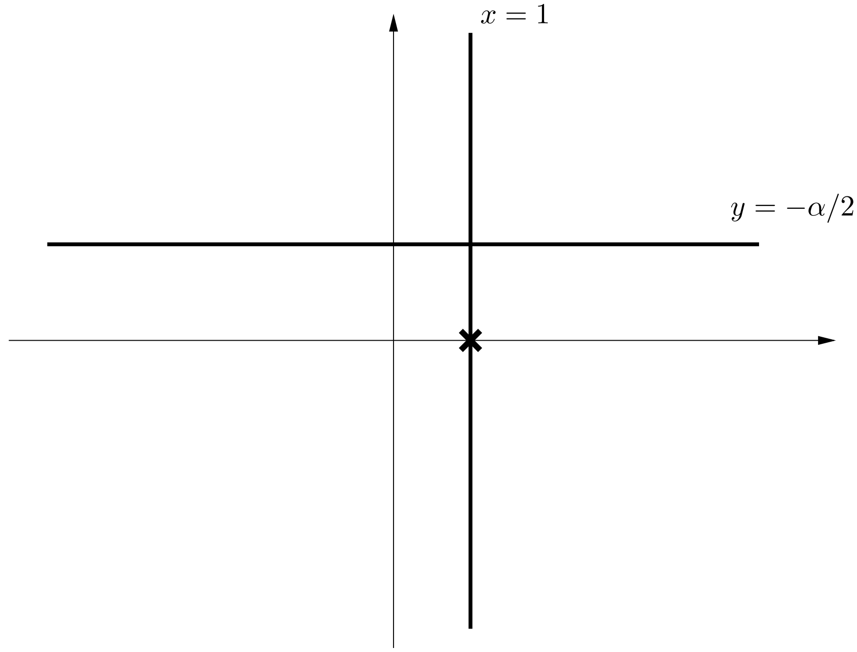

Figura 2: Esercizio 4

abbia senso deve essere $\overline{z} - 1 \neq 0$, cioé $z \neq 1$. Dopodiché, per trovare S_α moltiplichiamo numeratore e denominatore dell'espressione (5) per il coniugato di $\overline{z} - 1$, che è $z - 1$. Si ottiene

$$\frac{z-1+i\alpha}{\overline{z}-1} = \frac{z-1+i\alpha}{\overline{z}-1} \cdot \frac{z-1}{z-1} = \frac{(z-1)^2 + i\alpha z - i\alpha}{|z-1|^2} = \frac{z^2 - 2z + 1 + i\alpha z - i\alpha}{|z-1|^2}\,.$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\frac{z-1+i\alpha}{\overline{z}-1} = \frac{x^2 - y^2 - 2x - \alpha y + 1 + i(2xy - 2y + \alpha x - \alpha)}{(x-1)^2 + y^2}\,.$$

Allora

$$\frac{z+1+i\alpha}{\overline{z}+1} \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{z-1+i\alpha}{\overline{z}-1}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2xy - 2y + \alpha x - \alpha}{(x-1)^2 + y^2} = 0\,.$$

Se ne deduce che

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : (x,y) \neq (1,0) \quad \text{e} \quad 2xy - 2y + \alpha x - \alpha = 0\} \\ &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : (x,y) \neq (1,0) \quad \text{e} \quad (x-1)(2y + \alpha) = 0\}\ . \end{aligned}$$

Ne consegue che S_α è rappresentato sul piano di Gauss dall'unione della coppia di rette $x = 1$ e $y = -\alpha/2$, cui va tolto il punto di coordinate $(1, 0)$ (vedi figura 2).