

MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta - 18 Settembre 2006 (a.a. 784°)

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti)

Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z + i\operatorname{Im}z| = ||z| + \operatorname{Im}z|,$$

disegnandoli nel piano complesso.

Esercizio 2 (10 punti)

Sia

$$f(x) := 2x + \arctan \frac{2x}{2x^2 - 1}.$$

- i) Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti.
- ii) Stabilire dove f è continua, dove derivabile e gli eventuali limiti della derivata prima.
- iii) Studiare la monotonia di f , determinando eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
- iv) Tracciare un grafico qualitativo di f .

Non è richiesto lo studio del segno né della concavità.

Esercizio 3 (7 punti)

Calcolare, al variare del parametro $\alpha < 0$, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + (\log(1+x))^2}{x^3}.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Sia $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt - \frac{1}{x^5}.$$

- i) Mostrare che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Esiste ed, in tal caso, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$?
- ii) Mostrare che F ammette un unico zero in $]0, +\infty[$, cioè che esiste un unico $x_0 > 0$ tale che $F(x_0) = 0$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

È vietato uscire dall'aula prima che sia trascorsa un'ora dall'inizio della prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta - 18 Settembre 2006 (a.a. 784°)

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti)

Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z + \operatorname{Re}z| = ||z| + \operatorname{Re}z|,$$

disegnandoli nel piano complesso.

Esercizio 2 (10 punti)

Sia

$$f(x) := x + \arctan \frac{2x+1}{2x^2-1}.$$

- i) Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti.
- ii) Stabilire dove f è continua, dove derivabile e gli eventuali limiti della derivata prima.
- iii) Studiare la monotonia di f , determinando eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
- iv) Tracciare un grafico qualitativo di f .

Non è richiesto lo studio del segno né della concavità.

Esercizio 3 (7 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\log(1 + \alpha x^2) - (e^x - 1)^2 - \sinh x^2}.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Sia $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x e^{-t^3} dt - \frac{1}{x^4}.$$

- i) Mostrare che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Esiste ed, in tal caso, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$?
- ii) Mostrare che F ammette un unico zero in $]0, +\infty[$, cioè che esiste un unico $x_0 > 0$ tale che $F(x_0) = 0$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

È vietato uscire dall'aula prima che sia trascorsa un'ora dall'inizio della prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta - 18 Settembre 2006 (a.a. 784°)

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti)

Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - i\operatorname{Im}z| = ||z| - \operatorname{Im}z|,$$

disegnandoli nel piano complesso.

Esercizio 2 (10 punti)

Sia

$$f(x) := x + \arctan \frac{2x}{x^2 - 2}.$$

- i) Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti.
- ii) Stabilire dove f è continua, dove derivabile e gli eventuali limiti della derivata prima.
- iii) Studiare la monotonia di f , determinando eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
- iv) Tracciare un grafico qualitativo di f .

Non è richiesto lo studio del segno né della concavità.

Esercizio 3 (7 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cosh \sqrt{2x} - 1)^2 - \sin(\alpha x^2) + e^{x^2} - 1}{x^3}.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Sia $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x e^{-t^4} dt - \frac{1}{x^3}.$$

- i) Mostrare che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Esiste ed, in tal caso, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$?
- ii) Mostrare che F ammette un unico zero in $]0, +\infty[$, cioè che esiste un unico $x_0 > 0$ tale che $F(x_0) = 0$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

È vietato uscire dall'aula prima che sia trascorsa un'ora dall'inizio della prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta - 18 Settembre 2006 (a.a. 784°)

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti)

Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - \operatorname{Re}z| = ||z| - \operatorname{Re}z|,$$

disegnandoli nel piano complesso.

Esercizio 2 (10 punti)

Sia

$$f(x) := \arctan \frac{2 - 2x}{x^2 - 2} - \frac{x}{2}.$$

- i) Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti.
- ii) Stabilire dove f è continua, dove derivabile e gli eventuali limiti della derivata prima.
- iii) Studiare la monotonia di f , determinando eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
- iv) Tracciare un grafico qualitativo di f .

Non è richiesto lo studio del segno né della concavità.

Esercizio 3 (7 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\log(1 - \alpha x^2) + \cosh x - 1 + (1 - \cos \sqrt{2x})^2}.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Sia $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x e^{-t^5} dt - \frac{1}{x^2}.$$

- i) Mostrare che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Esiste ed, in tal caso, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$?
- ii) Mostrare che F ammette un unico zero in $]0, +\infty[$, cioè che esiste un unico $x_0 > 0$ tale che $F(x_0) = 0$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

È vietato uscire dall'aula prima che sia trascorsa un'ora dall'inizio della prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.