ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.12.2006
Tema 1

Esercizio 1 [8 punti]
Sia $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ e si ponga
$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

(i) Si provi che $\|\cdot\|$ è una norma in $\mathcal{C}^1([0,1])$.

(ii) Per ogni $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ si definisca la funzione $I(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; si provi che il funzionale $I : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$ è lineare e continuo (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup, in $\mathcal{C}^1([0,1])$ la norma $\|\cdot\|$).

Esercizio 2 [8 punti]

(i) Sia $\omega \in \mathbb{R}$; Determinare la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione di variabile complessa
$$z \mapsto \frac{e^{-i\omega z}}{(z^2-2z+2)^2}$$
attorno alla singolarità contenuta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

(ii) Determinare la trasformata di Fourier della funzione
$$f(t) = \frac{1}{(t^2-2t+2)^2}.$$

Esercizio 3 [8 punti]
Sia
$$u(x) = \text{p.v.}\,\frac{1}{x}$$
distribuzione temperata e sia $w_k(x) = u'(2kx)$, dove u' è la derivata di u nel senso delle distribuzioni e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

(i) Ricordando che $\mathcal{F}[u] = (\pi/i)\mathrm{sgn}$, si calcolino la trasformata di Fourier di u' e di w_k.

(ii) Usando (i), si dimostri che $w_k \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $k \to +\infty$.

Esercizio 4 [8 punti]
Sia f la funzione pari, periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ per ogni x in $[0,\pi]$.

(i) Determinare la serie di Fourier della derivata f' di f.

(ii) Determinare, utilizzando (i), la serie di Fourier di f; discuterne la convergenza puntuale, totale, in $L^2([-\pi,\pi])$.

(iii) Dedurne la somma della serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Esercizio 5 [facoltativo]
Si provi che la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)}{n^{3/2}}$$
è convergente in $L^2(\mathbb{R})$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.12.2006

Tema 2

Esercizio 1 [8 punti]

(i) Sia $\omega \in \mathbb{R}$; Determinare la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione di variabile complessa

$$z \mapsto \frac{e^{-i\omega z}}{(z^2 - 4z + 5)^2}$$

attorno alla singolarità contenuta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

(ii) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \frac{1}{(t^2 - 4t + 5)^2}.$$

Esercizio 2 [8 punti]

Sia $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ e si ponga

$$\|f\| = |f(-1)| + \max_{x \in [-1,1]} |f'(x)|.$$

(i) Si provi che $\|\cdot\|$ è una norma in $\mathcal{C}^1([-1,1])$.

(ii) Per ogni $f \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ si definisca la funzione $I(f) : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $I(f)(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$; si provi che il funzionale $I : \mathcal{C}^0([-1,1]) \to \mathcal{C}^1([-1,1])$ è lineare e continuo (in $\mathcal{C}^0([-1,1])$ si consideri la norma del sup, in $\mathcal{C}^1([-1,1])$ la norma $\|\cdot\|$).

Esercizio 3 [8 punti]

Sia f la funzione pari, periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \frac{3\pi}{2} - x$ per ogni x in $[0,\pi]$.

(i) Determinare la serie di Fourier della derivata f' di f.

(ii) Determinare, utilizzando (i), la serie di Fourier di f; discuterne la convergenza puntuale, totale, in $L^2([-\pi,\pi])$.

(iii) Dedurne la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Esercizio 4 [8 punti]

Sia

$$u(x) = \text{p.v.}\,\frac{1}{x}$$

distribuzione temperata e sia $w_k(x) = u'(kx/2)$, dove u' è la derivata di u nel senso delle distribuzioni e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

(i) Ricordando che $\mathcal{F}[u] = (\pi/i)\mathrm{sgn}$, si calcolino la trasformata di Fourier di u' e di w_k.

(ii) Usando (i), si dimostri che $w_k \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $k \to +\infty$.

Esercizio 5 [facoltativo]

Si provi che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)}{n^{3/2}}$$

è convergente in $L^2(\mathbb{R})$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.