

# ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

## Appello dell'8.1.2007

### Esercizio 1 [7 punti]

Siano  $\alpha$  un parametro reale,  $f(x, y)$  la funzione

$$f(x, y) = \frac{\arctan(xy)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

e  $B_1$  il disco unitario di  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Si provi che se  $\alpha < 2$  allora  $f \in L^1(B_1)$  (sugg.:  $|\arctan t| \leq |t|$ );
- (ii) Si mostri che per ogni  $1 < \alpha < 2$  la funzione  $f$  è sommabile in  $\mathbb{R}^2$ ; per tali valori di  $\alpha$  si calcoli  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ .

### Esercizio 2 [10 punti]

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z^3 - 1)(z^2 + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- (i) Si classifichino le singolarità di  $f$  e si calcolino i residui in quelle con parte immaginaria  $\geq 0$ .
- (ii) Si provi che la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(x^3 - 1)(x^2 + 1)}.$$

è sommabile su  $\mathbb{R}$  e si calcoli l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ .

- (iii) Si classifichino le singolarità di

$$h(z) = f(z) \frac{e^{\pi z} - 1}{\sinh(\pi z)}.$$

### Esercizio 3 [6 punti]

Si studino la convergenza puntuale ed uniforme in  $\mathbb{R}$  della successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-n|x|}.$$

### Esercizio 4 [9 punti]

Si consideri la serie di Fourier

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

- (i) Si provi che la serie converge in  $L^2(-\pi, \pi)$ .
- (ii) (**Facoltativo**) Si provi che la serie converge in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ad una distribuzione temperata  $f$  (sugg.: si consideri la serie delle trasformate di Fourier).
- (iii) Dato per noto il punto (ii), si provi che  $f$  è una distribuzione  $2\pi$ -periodica.
- (iv) Sia  $u$  distribuzione temperata soluzione dell'equazione differenziale

$$u'' - u = f.$$

Si calcoli la trasformata di Fourier di  $u$  in funzione di quella di  $f$ , esprimendola poi come somma di una serie.

- (v) Usando (iv), si esprima  $u$  come somma di una serie di Fourier e si provi che  $u$  è funzione continua su  $\mathbb{R}$ .

---

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

**Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.**