

ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.6.2007

Esercizio 1 [12 punti]

Si consideri la funzione $g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z^2 + 4)^2}$. Si chiede di

- (a) trovarne i residui nelle singolarità con parte immaginaria > 0 ;
- (b) dire se esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

e in caso affermativo calcolarlo usando il metodo dei residui;

- (c) classificare le singolarità di $f(z) = g(z) \frac{z - \sqrt{2\pi}}{\cos(z^2) - 1} \sinh(\pi z)$.

Esercizio 2 [10 punti]

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{se } 0 < |x| \leq n, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } |x| > n, \end{cases}$$

- (a) Si calcoli il limite puntuale f di f_n e si dica se la convergenza è uniforme in \mathbb{R} .
- (b) Si dica se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
- (c) Si provi che f definisce una distribuzione temperata e se ne calcoli la trasformata di Fourier. Si dica se $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- (d) Si dica se f_n converge a f in $L^1(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 [10 punti]

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se } |x| \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

- (a) si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni;
- (b) si esprima f'' in termini di f ;
- (c) mediante il punto 2 si calcoli la trasformata di Fourier di f'' esprimendola in funzione di \hat{f} , e se ne deduca il valore di \hat{f} ;
- (d) si provi che \hat{f} è prolungabile con continuità su tutto \mathbb{R} e che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; si dica se ciò poteva essere dedotto dalle proprietà di f ; si provi infine che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
- (e) si deduca dall'espressione di \hat{f} il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(\xi\pi/2) + \cos(3\xi\pi/2)}{1 - \xi^2} d\xi;$$

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.