

ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 6.9.2007

Esercizio 1 [10 punti]

Siano $\varepsilon > 0$ e $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}.$$

- (i) Si provi che $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$.
- (ii) Si calcoli la trasformata di Fourier \widehat{f}_ε di f_ε (sugg.: usare metodi di variabile complessa, separando il caso $\omega > 0$ dal caso $\omega < 0$).
- (iii) Si calcoli il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ di \widehat{f}_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- (iv) Usando (iii), si calcoli il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ di f_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (sugg.: può essere utile ricordare che $H = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn})$).

Esercizio 2 [8 punti]

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cosh(1/z)}{1 - z}$$

- i) Classificare le singolarità di f .
- ii) Calcolare il residuo di f in $z_0 = 0$ ed in $z_1 = 1$.
- iii) Calcolare, al variare di $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$,

$$\int_{C_\lambda(0)} f(z) dz,$$

dove $C_\lambda(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio λ .

Esercizio 3 [10 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{per } 0 < x < 1/2 \\ 0 & \text{per } 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

- i) Si determini la serie di Fourier della prolungata 2-periodica pari \tilde{f} di f e se ne studi la convergenza (in $L^2(-1, 1)$, puntuale ed uniforme in \mathbb{R});
- ii) se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2};$$

- iii) si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni di \tilde{f} .

Esercizio 4 [4 punti]

Siano A un insieme misurabile e $u \in L^1(A) \cap L^\infty(A)$. Si provi che $u \in L^2(A)$ e $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty}^{1/2} \|u\|_{L^1}^{1/2}$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.