

ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.9.2007

Esercizio 1 [8 punti]

Siano α un parametro reale e $f = f(x, y)$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{(|x| + |y|)^\alpha}$$

e B_1 il disco unitario di \mathbb{R}^2 .

1. Si provi che se $\alpha < 4$, allora $f \in L^1(B_1)$.
2. Si mostri che se $2 < \alpha < 4$ la funzione f è sommabile in \mathbb{R}^2 ; per tali valori di α si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy$.

Esercizio 2 [8 punti]

Si scriva una funzione f di variabile complessa olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, i, -1, -i\}$ che abbia una singolarità essenziale in $z = 1$, un polo del primo ordine in $z = i$, un polo del secondo ordine in $z = -1$, una singolarità eliminabile in $z = -i$ e che soddisfi

$$\int_{C_2(0)} f(z) \, dz = 4\pi i,$$

dove $C_2(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario. Si studino poi le singolarità della funzione

$$g(z) = \sinh \frac{1}{z-1} - \frac{1 - \cos(z+i)}{(z^4 - 1)^2}$$

e si verifichi se g soddisfa le precedenti condizioni.

Esercizio 3 [8 punti]

Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (\tanh x) \cdot e^{-|x-n|} & \text{se } x > 0, \\ e^{-n} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

(si ricordi che $\tanh x = \sinh x / \cosh x$).

1. Si calcoli il limite puntuale di $\{f_n\}_{n \geq 1}$ per $n \rightarrow +\infty$.
2. Si verifichi se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in \mathbb{R} oppure in $[-1, 1]$.
3. Si verifichi se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 4 [8 punti]

Si calcoli con metodi di variabile complessa la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Se ne deduca un'espressione esplicita per il prodotto di convoluzione $g * g$, dove $g(x) = e^{-|x|}$.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.