Analisi Reale e Complessa - a.a. 2006/2007

Primo appello - Tema 1

Esercizio 1

Sia $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ e si ponga

$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|\,.$$

(i) Si provi che $\|\cdot\|$ è una norma in $\mathcal{C}^1([0,1])$.

(ii) Per ogni $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ si definisca la funzione $I(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; si provi che il funzionale $I : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$ è lineare e continuo (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup, in $\mathcal{C}^1([0,1])$ la norma $\|\cdot\|$).

Svolgimento

Per provare che $\|\cdot\|$ è una norma bisogna provare che

1. Se $f \not\equiv 0$, allora $\|f\| > 0$

   Essendo $\|f\| \geq 0$ perché somma di quantità positive, è sufficiente dimostrare che se $\|f\| = 0$ allora $f \equiv 0$. Notiamo che

   $$\|f\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(0) = 0 \;\text{ e }\; \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(0) = 0 \;\text{ e }\; f' \equiv 0\,.$$

   Allora f è una funzione costante ($f'(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$) nulla in $x = 0$ e quindi $f(x) = f(0) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

   Si ha
   $$\begin{aligned}\|\alpha f\| &= |\alpha f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |\alpha f'(x)| = |\alpha||f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |\alpha||f'(x)| \\ &= |\alpha||f(0)| + |\alpha| \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |\alpha|\|f\|\,.\end{aligned}$$

3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ per ogni $f, g \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

   Fissate $f, g \in \mathcal{C}^1([0,1])$, per il teorema di Weierstrass esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che

   $$|f'(x_0) + g'(x_0)| = \max_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)|\,.$$

   Allora si ha

   $$\begin{aligned}\|f + g\| &= |f(0) + g(0)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)| = |f(0) + g(0)| + |f'(x_0) + g'(x_0)| \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + |f'(x_0)| + |g'(x_0)| \\ &\leq |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| + |g(0)| + \max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = \|f\| + \|g\|\,.\end{aligned}$$

Veniamo ora alla seconda parte dell'esercizio. La linearità di $\mathcal{I}$ discende dalla linearità dell'integrale. Infatti, se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^x \big[\alpha f(t) + \beta g(t)\big]\ dt = \alpha \int_0^x f(t)\ dt + \beta \int_0^x g(t)\ dt \\ &= \alpha \mathcal{I}(f)(x) + \beta \mathcal{I}(g)(x)\end{aligned}$$

Riguardo alla continuità, bisogna dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vale

$$\|\mathcal{I}(f)\| \leq C\|f\|_\infty\,. \tag{1}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\mathcal{I}(f)'(x) = f(x)\,,$$

da cui, essendo $\mathcal{I}(f)(0) = 0$ e

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

si ottiene

$$\|\mathcal{I}(f)\| = |\mathcal{I}(f)(0)| + \|f\|_\infty = \|f\|_\infty\,,$$

e quindi (1) vale con $C = 1$.

Esercizio 2

(i) Sia $\omega \in \mathbb{R}$. Determinare la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione di variabile complessa

$$z \mapsto \frac{e^{-i\omega z}}{(z^2-2z+2)^2}$$

attorno alla singolarità contenuta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

(ii) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \frac{1}{(t^2-2t+2)^2}.$$

Svolgimento

Sia

$$\varphi(x) = \frac{e^{-i\omega z}}{(z^2-2z+2)^2}\,.$$

Le singolarità di φ sono gli zeri di $z^2 - 2z + 2$, e dunque

$$z_1 = 1 + i\,, \qquad z_2 = 1 - i\,.$$

Poiché sono zeri di molteplicità 2 per $z^2 - 2z + 2$, essi sono poli del secondo ordine per φ. Infatti

$$\lim_{z\to 1+i} (z-1-i)^2\varphi(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{e^{-i\omega z}}{(z-1+i)^2} = -\frac{e^{\omega(1-i)}}{4} \tag{2}$$

$$\lim_{z\to 1-i} (z-1+i)^2\varphi(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{e^{-i\omega z}}{(z-1-i)^2} = -\frac{e^{-\omega(1+i)}}{4}\,. \tag{3}$$

Per calcolare la parte singolare dello sviluppo di Laurent di φ centrato in $z_1 = 1 + i$, si può procedere in due modi.

1. Poiché z_1 è polo del secondo ordine, lo sviluppo di Laurent di φ si scrive

$$\varphi(z) = \frac{c_{-2}}{(z-z_1)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_1} + g(z)\,,$$

dove g è funzione analitica in un intorno di z_1. Usando (2), segue che

$$\begin{aligned}
c_{-2} &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)^2\varphi(z) = -\frac{e^{\omega(1-i)}}{4}\\
c_{-1} &= \operatorname{res}(\varphi, z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}(z-z_1)^2\varphi(z) = \lim_{z\to 1+i}\frac{d}{dz}e^{-i\omega z}(z-1+i)^2\\
&= \lim_{z\to 1+i} -e^{-i\omega z}\frac{i\omega(z-1+i)+2}{(z-1+i)^3} = \frac{i}{4}(\omega-1)e^{\omega(1-i)}\,.
\end{aligned}$$

Quindi la parte singolare dello sviluppo di Laurent di φ centrato in $z_1 = 1+i$ si scrive

$$-\frac{e^{\omega(1-i)}}{4}\frac{1}{(z-1-i)^2} + i\frac{e^{\omega(1-i)}}{4}(\omega-1)\frac{1}{z-1-i}\,.$$

2. Poiché

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2}\cdot e^{-i\omega z}\cdot\frac{1}{(z-1+i)^2}\,, \tag{4}$$

sviluppiamo attorno a $z_1 = 1+i$ ciascuno dei tre fattori. Per il primo non c'è nulla da fare. Riguardo al secondo si ha

$$e^{-i\omega z} = e^{-i\omega(1+i)}e^{-i\omega(z-1-i)} = e^{-i\omega(1+i)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k(z-1-i)^k\,. \tag{5}$$

Per il terzo fattore, sfruttando il teorema di derivazione per serie e considerando

$$|z-1-i| < 2\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1+i)^2} &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1+i}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1-i+2i}\right) = -\frac{d}{dz}\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{z-1-i}{2i}}\\
&= -\frac{1}{2i}\frac{d}{dz}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2i)^p}(z-1-i)^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)(z-1-i)^p\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Da (4)-(6) si ottiene

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{e^{-i\omega(1+i)}}{(z-1-i)^2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k(z-1-i)^k\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)(z-1-i)^p\right)\\
&= \frac{e^{\omega(1-i)}}{(z-1-i)^2}\cdot\sum_{k,p\geq 0}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)(z-1-i)^{k+p}\\
&= \frac{e^{\omega(1-i)}}{(z-1-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{k+p=n\\ k,p\geq 0}}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)\right)(z-1-i)^n\,.
\end{aligned}$$

Isolando all'interno della sommatoria i termini con $n = 0$ e $n = 1$, si ha che la parte singolare dello sviluppo di Laurent è data da

$$\frac{e^{\omega(1-i)}}{(z-1-i)^2}\left[\sum_{\substack{k+p=0\\k,p\geq 0}}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)+\sum_{\substack{k+p=1\\k,p\geq 0}}\frac{(-i)^k}{k!}\omega^k\frac{(-1)^p}{(2i)^{p+2}}(p+1)\right],$$

Osservando che

$$\begin{array}{llll} k+p=0 \quad \text{e} \quad k,p\geq 0 & \Rightarrow & k=p=0 & \\ k+p=1 \quad \text{e} \quad k,p\geq 0 & \Rightarrow & (k=0 \quad \text{e} \quad p=1) \quad \text{o} \quad (k=1 \quad \text{e} \quad p=0) \end{array}$$

si ottiene che la parte singolare cercata è

$$\frac{e^{\omega(1-i)}}{(z-1-i)^2}\left[\frac{1}{(2i)^2}-\frac{2}{(2i)^3}-\frac{i\omega}{(2i)^2}\right]=-\frac{e^{\omega(1-i)}}{4}\frac{1}{(z-1-i)^2}+i\frac{e^{\omega(1-i)}}{4}(\omega-1)\frac{1}{z-1-i}\,.$$

Per calcolare la trasformata di Fourier di f, dopo aver preliminarmente verificato che $f \in L^1(\mathbb{R})$ perché funzione continua tale che

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^4|f(t)| = 1\,,$$

osserviamo che

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(z^2-2z+2)^2}=0$$

e dunque siamo nelle condizioni di poter applicare il Lemma di Jordan e scrivere che

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{(t^2-2t+2)^2}=\begin{cases}2\pi i\,\mathrm{res}\,(\varphi,1+i) & \text{se} \quad \omega<0\,,\\ -2\pi i\,\mathrm{res}\,(\varphi,1-i) & \text{se} \quad \omega>0\,.\end{cases}$$

Da (3) si ha che

$$\mathrm{res}\,(\varphi,1+i)=-\frac{e^{-\omega(1+i)}}{4}\,,$$

mentre

$$\begin{aligned}\mathrm{res}\,(\varphi,1-i)&=\lim_{z\to 1-i}\frac{d}{dz}(z-1+i)^2\varphi(z)=\lim_{z\to 1-i}\frac{d}{dz}\frac{e^{-i\omega z}}{(z-1-i)^2}\\&=\lim_{z\to 1-i}-e^{-i\omega z}\frac{i\omega(z-1-i)+2}{(z-1-i)^3}=ie^{-\omega(1+i)}\frac{\omega+1}{4}\,.\end{aligned}$$

Si ottiene che

$$\widehat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-\omega)e^{\omega(1-i)} & \text{se} \quad \omega<0\,,\\ \frac{\pi}{2}(1+\omega)e^{-\omega(1+i)} & \text{se} \quad \omega>0\,,\end{cases}$$

ed inoltre, essendo $\widehat{f}$ continua,

$$\widehat{f}(0)=\lim_{\omega\to 0}\widehat{f}(\omega)=\frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizio 3

Sia

$$u(x) = \text{p.v.}\, \frac{1}{x}$$

distribuzione temperata e sia $w_k(x) = u'(2kx)$, dove u' è la derivata di u nel senso delle distribuzioni.

(i) Ricordando che $\mathcal{F}[u] = (\pi/i)\text{sgn}$, si calcolino la trasformata di Fourier di u' e di w_k.

(ii) Usando (i), si dimostri che $w_k \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Si ha

$$\mathcal{F}[u'](\omega) = (i\omega)\mathcal{F}[u](\omega) = i\omega\frac{\pi}{i}\text{sgn}\,(\omega) = \pi|\omega|\,,$$

$$\mathcal{F}[w_k](\omega) = \frac{1}{2k}\mathcal{F}[u']\left(\frac{\omega}{2k}\right) = \frac{\pi}{4k^2}|\omega|\,.$$

Poiché $w_k \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e solo se $\mathcal{F}[w_k] \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, possiamo limitarci a dimostrare che per $k \to +\infty$ si ha

$$\frac{\pi}{4k^2}|\omega| \to 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

Poiché per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la funzione $\omega \mapsto |\omega|v(\omega)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \langle w_k, v\rangle = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{4k^2}\int_{\mathbb{R}} |\omega|v(\omega)\; d\omega = 0\,,$$

come si voleva.

Esercizio 4

Sia f la funzione pari, periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ per ogni x in $[0, \pi]$.

(i) Determinare la serie di Fourier della derivata f' di f.

(ii) Determinare, utilizzando (i), la serie di Fourier di f; discuterne la convergenza puntuale, totale, in $L^2([-\pi, \pi])$.

(iii) Dedurne la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Svolgimento

La prolungata 2π-periodica pari di f nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} - x & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0\,. \end{cases}$$

Si osservi che f è funzione continua ($f(\pi+) = f(\pi-) = \pi/2$), derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$ tranne che nell'insieme $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (e quindi è derivabile quasi ovunque), con derivata f' continua a tratti. Se ne deduce che la sua serie di Fourier converge in $L^2(-\pi, \pi)$ (in quanto $f \in L^2(-\pi, \pi)$), totalmente su tutta la retta reale e quindi puntualmente. Inoltre f' è la funzione 2π-periodica che nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ vale $f'(x) = \operatorname{sgn} x$. Essendo dispari, la sua serie di Fourier è una serie di soli seni

$$s[f'](x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$$

dove

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = -\frac{2}{\pi k}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right].$$

da cui si ottiene che

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \text{ è pari,} \\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{se} \quad k \text{ è dispari.} \end{cases} \tag{7}$$

Ne consegue che la serie di Fourier di f' si scrive

$$s[f'](x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)} \sin(2j+1)x\,.$$

La serie di Fourier di f è una serie di soli coseni, essendo f pari e dunque

$$s[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)\,.$$

Per calcolare i coefficienti di Fourier di f noti quelli di f' è sufficiente osservare che grazie alle proprietà di regolarità di f e sfruttando (7) valgono

$$b_k = -k a_k \quad \forall k \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_k = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k > 0 \text{ è pari,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{se} \quad k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 0\,.$$

Quindi si ha

$$s[f](x) = -\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^2} \cos(2j+1)x\,.$$

Grazie all'uguaglianza di Parseval si ha

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2j+1)^4} &= \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}\right) dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{4}x\right)_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\,,\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Esercizio 5 (Facoltativo)

Si provi che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x)}{n^{3/2}}$$

è convergente in $L^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Per provare la convergenza è sufficiente dimostrare che la successione delle ridotte

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}(x)}{k^{3/2}}$$

è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, poiché, essendo $L^2(\mathbb{R})$ completo, ogni successione di Cauchy è convergente. Siano allora $n > p \geq 1$ numeri naturali. Usando le definizioni di S_n e S_p e la disuguaglianza triangolare per la norma $\|\cdot\|_2$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_p\|_2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}}{k^{3/2}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\chi_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}}{k^{3/2}} \right\|_2 = \left\| \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\chi_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}}{k^{3/2}} \right\|_2 \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{n} \left\| \frac{\chi_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}}{k^{3/2}} \right\|_2 = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi^2_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}(x)}{k^3}\, dx \right)^{1/2} \\
&= \sum_{k=p+1}^{n} \left(\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{k^3}\, dx \right)^{1/2} = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{2\sqrt{k}}{k^3} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k^{5/4}} \to 0 \quad \text{per} \quad p, n \to +\infty\,,
\end{aligned}$$

essendo $\sum_{k=1}^{+\infty} (1/k^{5/4})$ una serie numerica convergente. Quindi la successione $\{S_n\}_{n\geq 1}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, come si voleva dimostrare.