Analisi Reale e Complessa - a.a. 2006/2007

Secondo appello

Esercizio 1

Siano α un parametro reale, $f(x,y)$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

e B_1 il disco unitario di $\mathbb{R}^2$.

(i) Si provi che se $\alpha < 2$ allora $f \in L^1(B_1)$ (sugg.: $|\arctan t| \le |t|$);

(ii) Si mostri che per ogni $1 < \alpha < 2$ la funzione f è sommabile in $\mathbb{R}^2$; per tali valori di α si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$.

Svolgimento

(i) Si noti che

$$|f(x,y)| \le \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}\,,$$

e quindi se dimostriamo che per $\alpha < 2$

$$\iint_{B_1} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy < +\infty\,, \tag{1}$$

risulterà $f \in L^1(B_1)$. Per calcolare l'integrale in (1), passiamo a coordinate polari e sfruttiamo il teorema di Tonelli. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\iint_{B_1} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|}{\rho^{2\alpha}}\rho\,d\rho d\vartheta \\ &= \left(\int_0^{2\pi}|\cos\vartheta\sin\vartheta|\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-3}}\,d\rho\right) < +\infty\end{aligned}$$

se e solo se $2\alpha - 3 < 4$, cioè se e solo se $\alpha < 2$, come si voleva.

(ii) Grazie a (i), $f \in L^1(B_1)$ per $\alpha < 2$. Dunque è sufficiente provare che se $1 < \alpha < 2$, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1)$. Osserviamo che

$$|f(x,y)| \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,,$$

e quindi se dimostriamo che per $1 < \alpha < 2$

$$\iint_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy < +\infty\,, \tag{2}$$

risulterà $f \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1)$. Per calcolare l'integrale in (2), passiamo ancora a coordinate polari e sfruttiamo il teorema di Tonelli. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\ dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho\ d\rho d\vartheta \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} < +\infty\end{aligned}$$

se e solo se $2\alpha - 1 > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 1$, come si voleva. Poiché f è funzione dispari in entrambe le variabili, usando il teorema di Fubini si ottiene facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha}\ dx \right)\ dy = 0\,.$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z^3-1)(z^2+1)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

(i) Si classifichino le singolarità di f e si calcolino i residui in quelle con parte immaginaria ≥ 0.

(ii) Si provi che la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(x^3-1)(x^2+1)}.$$

è sommabile su $\mathbb{R}$ e si calcoli l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$.

(iii) Si classifichino le singolarità di

$$h(z) = f(z)\frac{e^{\pi z}-1}{\sinh(\pi z)}.$$

Svolgimento

(i) Poiché $e^{i\pi z} \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, le singolarità di f si trovano nei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$P(z) \doteq (z^3-1)(z^2+1) = 0\,,$$

e dunque sono i punti

$$z_1 = 1\,, \quad z_2 = e^{i2\pi/3}\,, \quad z_3 = e^{-i2\pi/3}\,, \quad z_4 = i\,, \quad z_5 = -i\,.$$

Poiché $z_1, \dots, z_5$ sono tutti zeri di molteplicità 1 del polinomio $P(z)$, essi sono poli del primo ordine per f. Riguardo al calcolo dei residui, per $k = 1, 2, 4$ si ha

$$\operatorname{res}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{e^{i\pi z}}{\dfrac{P(z)}{z - z_k}} = \frac{e^{i\pi z_k}}{P'(z_k)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{i\pi}}{6} & \text{se} \quad k = 1\,, \\ \dfrac{\exp\left(i\pi e^{i2\pi/3}\right)}{3e^{i4\pi/3}\left(e^{i4\pi/3} + 1\right)} & \text{se} \quad k = 2\,, \\ -\dfrac{e^{-\pi}}{2i(i+1)} & \text{se} \quad k = 4\,, \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{6} & \text{se} \quad k = 1\,, \\ \dfrac{i}{3} e^{-\pi\sqrt{3}/2} & \text{se} \quad k = 2\,, \\ \dfrac{e^{-\pi}}{4}(1 + i) & \text{se} \quad k = 4\,, \end{cases} \tag{3}$$

(ii) Si osservi che

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^3 - 1} \overset{\text{(H)}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{3x^2} = -\frac{\pi}{6}\,,$$

e dunque g è prolungabile per continuità su tutta la retta reale. Ne segue che $g \in L^1(-2, 2)$. Inoltre

$$|g(x)| \leq \frac{1}{|x^3 - 1||x^2 + 1|}\,,$$

e vale

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x^5| \frac{1}{|x^3 - 1||x^2 + 1|} = 1\,,$$

da cui si deduce che $g \in L^1(\mathbb{R} \backslash] - 2, 2[)$, essendo $1/x^5 \in L^1(\mathbb{R} \backslash] - 2, 2[)$. Dunque g è sommabile. Per calcolarne l'integrale si osservi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \operatorname{Im} \left[\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right]. \tag{4}$$

Notiamo che la funzione di variabile complessa

$$\psi : z \mapsto \frac{1}{(z^3 - 1)(z^2 + 1)}$$

soddisfa le ipotesi del lemma di Jordan essendo $\psi \in H(\mathbb{C} \setminus B_2(0))$ e

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{(z^3 - 1)(z^2 + 1)} = 0\,.$$

Essendo $f(z) = e^{i\pi z} \psi(z)$ ed avendo f sull'asse reale la sola singolarità in $x = 1$ che è un polo semplice, segue che si ha

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z = 0} \operatorname{res}(f, z) \\ &= 2\pi i \left[\operatorname{res}(f, e^{i2\pi/3}) + \operatorname{res}(f, i) \right] + \pi i \operatorname{res}(f, 1)\,. \end{aligned}$$

da cui, usando (3),

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\frac{i}{3} e^{-\pi\sqrt{3}/2} + \frac{e^{-\pi}}{4}(1+i)\right] - i\frac{\pi}{6}\,.$$

Quindi, grazie a (4) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-\pi} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} - \frac{1}{3}\right)\,.$$

(iii) Le singolarità di h sono le singolarità di f cui vanno aggiunti i punti dove si annulla la funzione $z \mapsto \sinh(\pi z)$, cioé tutti e soli i punti del tipo

$$z = ki \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Si osservi che tali punti sono tutti zeri di molteplicità 1 per $\sinh(\pi z)$, essendo

$$\sinh(k\pi i) = i\sin(k\pi) = 0\,, \qquad \frac{d}{dz}\sinh(\pi z)\Big|_{z=ki} = \pi\cosh(k\pi i) = \pi\cos k\pi = (-1)^k\pi\,.$$

Ci sono tre casi da considerare

1. $z = \pm i$. I punti $\pm i$ sono poli semplici per f e zeri di molteplicità 1 per $\sinh(\pi z)$. Si deduce allora che tali punti sono poli di ordine 2 per h. Infatti, per $z = i$ si ottiene

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 h(z) = \frac{e^{-\pi}}{i^3 - 1}(e^{\pi i} - 1)\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}\cdot\frac{z-i}{\sinh\pi z} = -\frac{e^{-\pi}}{i+1}\cdot\frac{1}{i\pi} \neq 0\,,$$

   e, in modo del tutto analogo in $z = -i$,

$$\lim_{z\to -i}(z+i)^2 h(z) = -\frac{e^{\pi}}{i-1}\cdot\frac{1}{i\pi} \neq 0\,.$$

2. $z = ki$, con k dispari, $k \neq \pm 1$. Tali punti non sono singolarità o zeri per f, mentre sono zeri di molteplicità 1 per $\sinh(\pi z)$, ma non per $z \mapsto e^{\pi z} - 1$. Si deduce allora che tali punti sono poli semplici per h. Infatti

$$\lim_{z\to ki}(z-ki)h(z) = f(ki)(e^{k\pi i} - 1)\lim_{z\to ki}\frac{z-ki}{\sinh(\pi z)} = -2f(ki)\frac{(-1)^k}{\pi} \neq 0\,.$$

3. $z = ki$, con k pari. Tali punti non sono singolarità per f, mentre sono zeri di molteplicità 1 per $\sinh(\pi z)$ e per $z \mapsto e^{\pi z} - 1$, essendo

$$(e^{\pi z} - 1)\Big|_{z=ki} = 0\,, \qquad \frac{d}{dz}(e^{\pi z} - 1)\Big|_{z=ki} = \pi e^{k\pi i} = \pi\,.$$

   Si deduce allora che tali punti sono singolarità eliminabili per h. Infatti

$$\lim_{z\to ki} h(z) = f(ki)\lim_{z\to ki}\frac{e^{\pi z} - 1}{\sinh(\pi z)} \overset{(H)}{=} f(ki)\lim_{z\to ki}\frac{\pi e^{\pi z}}{\pi\cosh\pi z} = f(ki)\,.$$

Esercizio 3

Si studino la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-n|x|}.$$

Svolgimento

Facilmente si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre se $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \overset{t=n|x|}{=} \lim_{t\to+\infty} \operatorname{sgn}(x)te^{-t} = 0\,.$$

Quanto alla convergenza uniforme, deve essere

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0\,.$$

Poiché f_n è dispari e $f_n(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, si ha

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq 0} f_n(x) = \sup_{x\geq 0} nxe^{-nx}\,.$$

Ora, per $x \geq 0$ si ha

$$f_n'(x) = ne^{-nx}(1 - nx)\,,$$

da cui si ottiene che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq 0} nxe^{-nx} = f_n(1/n) = e^{-1}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = e^{-1}$$

e dunque la successione data non converge uniformemente.

Esercizio 4

Si consideri la serie di Fourier

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}\,.$$

(i) Si provi che la serie converge in $L^2(-\pi, \pi)$.

(ii) **(Facoltativo)** Si provi che la serie converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ad una distribuzione temperata f (sugg.: si consideri la serie delle trasformate di Fourier).

(iii) Dato per noto il punto (ii), si provi che f è una distribuzione 2π-periodica.

(iv) Sia u distribuzione temperata soluzione dell'equazione differenziale

$$u'' - u = f\,.$$

Si calcoli la trasformata di Fourier di u in funzione di quella di f, esprimendola poi come somma di una serie.

(v) Usando (iv), si esprima u come somma di una serie di Fourier e si provi che u è funzione continua su $\mathbb{R}$.

Svolgimento

(i) Essendo $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una base ortogonale per $L^2(-\pi,\pi)$, è sufficiente osservare che la serie dei quadrati dei coefficienti è convergente, cioè

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty\,. \tag{5}$$

Infatti, se $n > p$ e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}\,, \qquad S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{e^{ikx}}{k}$$

sono le ridotte n-esima e p-esima della serie di Fourier, grazie all'ortogonalità della famiglia $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e usando il teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned}\|S_n - S_p\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=p+1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} \right\|_2^2 = \sum_{k=p+1}^{n} \left\| \frac{e^{ikx}}{k} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=p+1}^{n} \frac{2\pi}{k^2} \to 0 \quad \text{per} \quad n,p \to +\infty\end{aligned}$$

grazie a (5). Si ottiene che la successione delle ridotte $\left\{S_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ della serie data è di Cauchy in $L^2(-\pi,\pi)$ e quindi convergente in $L^2(-\pi,\pi)$, essendo tale spazio completo.

(ii) Poiché una successione di distribuzioni temperate converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e solo se converge la successione delle trasformate di Fourier, consideriamo la serie della trasformate e facciamo vedere che questa converge. Essendo

$$\mathcal{F}[e^{ikx}](\omega) = \mathcal{F}[e^{ikx}\cdot 1] = \mathcal{F}[1](\omega - k) = 2\pi\delta(\omega - k) = 2\pi\delta_k\,,$$

la serie delle trasformate è

$$\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{k}\delta_k\,.$$

φ definisce una distribuzione temperata tramite

$$\langle \varphi, v\rangle = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v(k)}{k}\,, \tag{6}$$

dove la serie al secondo membro è assolutamente convergente essendo $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Infatti si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v(k)|}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|kv(k)|}{k^2} \le \|xv(x)\|_\infty \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty\,.$$

Per provare che (6) è una distribuzione temperata, fissiamo una successione $\left\{v_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ che tende a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In particolare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \|xv_n(x)\|_\infty = 0\,. \tag{7}$$

Allora,

$$|\langle \varphi, v_n \rangle| \leq 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v_n(k)|}{k} = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|k v_n(k)|}{k^2} \leq 2\pi \|x v_n(x)\|_\infty \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,,$$

da cui, usando (7), si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \varphi, v_n \rangle = 0\,.$$

Inoltre, per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\delta_k, v \right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\langle \delta_k, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{v(k)}{k} = \langle \varphi, v\rangle\,,$$

e dunque la serie delle trasformate converge a φ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Detta f la somma (in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$!) della serie di partenza, risulterà che $\widehat{f} = \varphi$.

(iii) Bisogna provare che $f(x+2\pi) = f(x)$ nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, cioé che vale

$$\langle f(x+2\pi), v\rangle = \langle f, v\rangle$$

per ogni funzione test $v \in \mathcal{S}$. Poiché

$$\langle f, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}, v \right\rangle\,,$$

e le funzioni $x \mapsto e^{ikx}$ sono continue, limitate e 2π-periodiche, si ha

$$\begin{aligned}
\langle f(x+2\pi), v\rangle = \langle f, v(x-2\pi)\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}, v(x-2\pi) \right\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} v(x-2\pi)\, dx \overset{y=x-2\pi}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(y+2\pi)}}{k} v(y)\, dy \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iky}}{k} v(y)\, dy = \lim_{n\to+\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}, v \right\rangle \\
&= \langle f, v\rangle\,,
\end{aligned}$$

come si voleva.

(iv) Poiché

$$\widehat{f} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\widehat{e^{ikx}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{k}\delta_k\,,$$

trasformando ambo i membri dell'equazione e tenendo conto che $\mathcal{F}[u''](\omega) = -\omega^2 \widehat{u}(\omega)$, si ottiene che

$$-(\omega^2+1)\widehat{u}(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{k}\delta_k\,,$$

da cui

$$\widehat{u}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\pi}{k}\delta_k = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{1}{\omega^2+1}\delta_k\,. \tag{8}$$

Poiché

$$\left\langle \frac{1}{\omega^2+1}\delta_k, v\right\rangle = \left\langle \delta_k, \frac{1}{\omega^2+1}v\right\rangle = \frac{v(k)}{k^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega^2+1}\delta_k = \frac{1}{k^2+1}\delta_k\,,$$

da (8) si ottiene

$$\widehat{u}(\omega) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\pi}{k(k^2+1)}\delta_k\,. \tag{9}$$

(v) Da (9) e sapendo che $2\pi\delta_k = \mathcal{F}[e^{ikx}]$, si ottiene

$$u(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{k(k^2+1)}\,, \tag{10}$$

uguaglianza che vale in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si osservi che la serie al secondo membro converge totalmente, essendo

$$\left|\frac{e^{ikx}}{k(k^2+1)}\right| \le \frac{1}{k^2+1}\,,$$

e quindi la sua somma è una funzione continua, essendo tali le funzioni $x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché inoltre la convergenza uniforme (e quindi quella totale) implica la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, da (10) segue che la serie converge totalmente ad u, e dunque u è funzione continua.