Analisi Reale e Complessa - a.a. 2006/2007

Terzo appello

Esercizio 1

Si consideri la funzione $g(z) = \dfrac{e^{2iz}}{(z^2+4)^2}$. Si chiede di

(a) trovarne i residui nelle singolarità con parte immaginaria > 0;

(b) dire se esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\, dx$$

e in caso affermativo calcolarlo usando il metodo dei residui;

(c) classificare le singolarità di $f(z) = g(z)\, \dfrac{z-\sqrt{2\pi}}{\cos(z^2)-1}\, \sinh(\pi z)$.

Svolgimento

(a) Le singolarità della funzione si trovano nei punti z tali che

$$z^2+4=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z=\pm 2i\,,$$

e sono poli del secondo ordine, essendo zeri di molteplicità 2 per il polinomio $P(z) = (z^2+4)^2$ e $e^{2i(\pm 2i)} \neq 0$. Quindi il residuo da calcolare è

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(g,2i) &= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}(z-2i)^2 g(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}}{(z+2i)^2}\\ &= \lim_{z\to 2i} 2e^{2iz}\frac{i(z+2i)-1}{(z+2i)^3} = -\frac{5}{32}e^{-4}i\,.\end{aligned}$$

(b) Poiché

$$\left|\frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\right| \le \frac{1}{(x^2+4)^2} \le \frac{1}{x^2+4} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$$

l'integrale esiste finito. Inoltre, essendo

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z^2+4)^2} = 0\,,$$

grazie al Lemma di Jordan e usando il Teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\, dx &= \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx\right) = \operatorname{Re}\big[2\pi i \operatorname{res}(g,2i)\big]\\ &= \frac{5}{16}e^{-4}\pi\,.\end{aligned}$$

(c) Le singolarità di f, oltre alle singolarità di g, si trovano nei punti z che soddisfano

$$\cos z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}\,, k \geq 0\,, \\ z = \pm i\sqrt{-2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}\,, k < 0\,. \end{array}$$

Se $k \neq 0, 1$ le singolarità sono poli del secondo ordine. Infatti, sia $z_k = \sqrt{2k\pi}$, $k \geq 2$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_k} (z - z_k)^2 f(z) &= \lim_{z\to z_k} g(z)(z - \sqrt{2\pi}) \sinh(\pi z) \frac{(z - z_k)^2}{\cos z^2 - 1} \\
&\overset{\text{(H)}}{=} -g(z_k)(z_k - \sqrt{2\pi}) \sinh(\pi z_k) \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{z \sin z^2} \\
&\overset{\text{(H)}}{=} -g(z_k)(z_k - \sqrt{2\pi}) \sinh(\pi z_k) \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\sin z^2 + 2z^2 \cos z^2} \\
&= -\frac{g(z_k)(z_k - \sqrt{2\pi}) \sinh(\pi z_k)}{4k\pi} \neq 0\,.
\end{aligned}$$

I casi con $z_k = -\sqrt{2k\pi}$, $k \geq 2$, oppure con $z_k = \pm i\sqrt{-2k\pi}$, $k < 0$ sono perfettamente analoghi e quindi omettiamo di discuterli. Consideriamo ora la singolarità in $z = 0$. Questa è un polo del terzo ordine. Infatti, sfruttando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} z^3 f(z) &= \lim_{z\to 0} g(z)(z - \sqrt{2\pi}) \frac{z^4}{\cos z^2 - 1} \frac{\sinh(\pi z)}{z} \\
&= -\sqrt{2\pi} g(0) \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{-z^4/2 + o(z^4)} \frac{\pi z + o(z)}{z} \overset{\text{(PdS)}}{=} 2\pi\sqrt{2\pi} g(0) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

La singolarità in $z = \sqrt{2\pi}$ è un polo del primo ordine. Infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\sqrt{2\pi}} (z - \sqrt{2\pi}) f(z) &= \lim_{z\to\sqrt{2\pi}} g(z) \frac{(z - \sqrt{2\pi})^2}{\cos z^2 - 1} \sinh(\pi z) \\
&\overset{\text{(H)}}{=} -g(\sqrt{2\pi}) \sinh(2\pi\sqrt{2\pi}) \lim_{z\to\sqrt{2\pi}} \frac{z - \sqrt{2\pi}}{z \sin z^2} \\
&\overset{\text{(H)}}{=} -g(\sqrt{2\pi}) \sinh(2\pi\sqrt{2\pi}) \lim_{z\to\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sin z^2 + 2z^2 \cos z^2} \\
&= -g(\sqrt{2\pi}) \sinh(2\pi\sqrt{2\pi}) \frac{1}{4\pi} \neq 0\,.
\end{aligned}$$

I punti di singolarità di g, $z = \pm 2i$ sono poli del primo ordine. Infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2i} (z - 2i) g(z) \frac{z - \sqrt{2\pi}}{\cos z^2 - 1} \sinh(\pi z) &= \lim_{z\to 2i} \frac{e^{2iz}}{(z + 2i)^2} \frac{z - \sqrt{2\pi}}{\cos z^2 - 1} \frac{\sinh(\pi z)}{z - 2i} \\
&= -\frac{e^{-4}}{16} \frac{2i - \sqrt{2\pi}}{\cos 4 - 1} \lim_{z\to 2i} \frac{\sinh(\pi z)}{z - 2i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(H)}}{=} -\frac{e^{-4}}{16}\frac{2i-\sqrt{2\pi}}{\cos 4 - 1}\lim_{z\to 2i}\pi\cosh(\pi z)\\
&= -\pi\frac{e^{-4}}{16}\frac{2i-\sqrt{2\pi}}{\cos 4 - 1} \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Il caso $z = -2i$ è perfettamente analogo omettiamo di discuterlo.

Esercizio 2

Si consideri la successione di funzioni

$$
f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{se} \quad 0 < |x| \leq n\,, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \text{ oppure } |x| > n\,, \end{cases}
$$

(a) Si calcoli il limite puntuale f di f_n e si dica se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.

(b) Si dica se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Si provi che f definisce una distribuzione temperata e se ne calcoli la trasformata di Fourier. Si dica se $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(d) Si dica se f_n converge a f in $L^1(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento

(a) Il limite puntuale è la funzione f definita da

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}
$$

Infatti, $f_n(0) = 0$ per ogni n e dunque

$$
\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 = f(0)\,.
$$

Se $x \neq 0$, fissato $n \geq [|x|] + 1$, dove $[|x|]$ è la parte intera di $|x|$, si ha

$$
f_n(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = f(x)\,.
$$

Riguardo alla convergenza uniforme, poiché $f_n(x) = f(x)$ per $|x| \leq n$, si ha

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|>n} \left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| \leq \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty\,,
$$

e dunque $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

(b) Si osservi che

$$
\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)\,,
$$

e quindi f è funzione continua (per $x \neq 0$ è rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo). Ne consegue che $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Abbiamo osservato prima che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Ne consegue che $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e dunque definisce una distribuzione temperata tramite la relazione

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\;dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$

Per calcolarne la trasformata di Fourier osserviamo che f può essere riscritta come

$$f(x) = (\cos x)\text{p.v.}\,\frac{1}{x} - \text{p.v.}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(e^{ix})\text{p.v.}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(e^{-ix})\text{p.v.}\,\frac{1}{x} - \text{p.v.}\,\frac{1}{x}\,.$$

Ricordando che

$$\mathcal{F}\left[\text{p.v.}\,\frac{1}{x}\right](\xi) = \frac{\pi}{i}\text{sgn}\,\xi\,,$$

si ottiene

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2i}\big[\text{sgn}\,(\xi-1) + \text{sgn}\,(\xi+1) - 2\text{sgn}\,\xi\big]\,.$$

Poiché $\widehat{f}$ non è funzione continua (ha punti di discontinuità in $\xi = \pm 1$ e in $\xi = 0$), non può essere la trasformata di Fourier di una funzione sommabile. Quindi $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

(d) Essendo $f \notin L^1(\mathbb{R})$, la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere ad f in $L^1(\mathbb{R})$. Invece, poiché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f, allora converge anche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se} \quad |x| \le \dfrac{3\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se} \quad |x| > \dfrac{3\pi}{2}\,. \end{cases}$$

(a) si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni;

(b) si esprima f'' in termini di f;

(c) mediante il punto 2 si calcoli la trasformata di Fourier di f'' esprimendola in funzione di $\hat{f}$, e se ne deduca il valore di $\hat{f}$;

(d) si provi che $\hat{f}$ è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$ e che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; si dica se ciò poteva essere dedotto dalle proprietà di f; si provi infine che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;

(e) si deduca dall'espressione di $\hat{f}$ il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(\xi\pi/2) + \cos(3\xi\pi/2)}{1-\xi^2}\,d\xi\,;$$

Svolgimento

(a) Indichiamo con χ_I la funzione caratteristica dell'intervallo I. Essendo f funzione continua, $\mathcal{C}^1$ a tratti si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x\big[\chi_{]-3\pi/2,-\pi/2[}(x) + \chi_{]\pi/2,3\pi/2[}(x)\big] - \sin x\chi_{]-\pi/2,\pi/2[}(x)\,, \\ f''(x) &= \cos x\big[\chi_{]-3\pi/2,-\pi/2[}(x) + \chi_{]\pi/2,3\pi/2[}(x)\big] - \cos x\chi_{]-\pi/2,\pi/2[}(x) \\ &\quad + \delta_{-3\pi/2} + \delta_{3\pi/2} + 2\delta_{-\pi/2} + 2\delta_{\pi/2} \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Sapendo che

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{se} \quad -3\pi/2 < x < -\pi/2 \text{ oppure } \pi/2 < x < 3\pi/2\,, \\ \cos x & \text{se} \quad -\pi/2 < x < \pi/2\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

da (1) si ottiene

$$f''(x) = -f(x) + \delta_{-3\pi/2} + \delta_{3\pi/2} + 2\delta_{-\pi/2} + 2\delta_{\pi/2}\,. \tag{2}$$

(c) Da (2), ricordando che

$$\mathcal{F}[\delta_{x_0}](\xi) = e^{-ix_0\xi}\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \widehat{f''}(\xi) &= -\widehat{f}(\xi) + e^{3\pi i\xi/2} + e^{-3\pi i\xi/2} + 2\big(e^{\pi i\xi/2} + e^{-\pi i\xi/2}\big) \\ &= -\widehat{f}(\xi) + 2\cos(3\pi\xi/2) + 4\cos(\pi\xi/2)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Poiché si ha anche

$$\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2\widehat{f}(\xi)\,,$$

usando (3) si ottiene

$$\widehat{f}(\xi) = 2\frac{\cos(3\pi\xi/2) + 2\cos(\pi\xi/2)}{1-\xi^2}\,. \tag{4}$$

(d) Essendo $\widehat{f}$ rapporto di funzione continue con denominatore che si annulla nei punti $\xi = \pm 1$, per stabilire che $\widehat{f}$ è prolungabile per continuità è sufficiente controllare che $\widehat{f}$ ha limiti finiti in tali punti.

$$\begin{aligned} \lim_{\xi\to\pm1}\widehat{f}(\xi) &= 2\lim_{\xi\to\pm1}\frac{\cos(3\pi\xi/2) + 2\cos(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} \overset{\text{(H)}}{=} 2\lim_{\xi\to\pm1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\sin(3\pi\xi/2) + 2\sin(\pi\xi/2)}{2\xi} \\ &= -\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Per provare che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, essendo $\widehat{f}$ continua,è sufficiente controllare il suo comportamento per $\xi \to \pm\infty$. Poiché

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{6}{|1-\xi^2|}\,,$$

ed inoltre $\xi \mapsto 6/|1-\xi^2|$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}\setminus[-2,2]) \cap L^2(\mathbb{R}\setminus[-2,2])$, si ottiene che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, come si voleva. Si noti che, essendo f funzione continua a supporto compatto, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$: da $f \in L^1(\mathbb{R})$ si deduce $\widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mentre da $f \in L^2(\mathbb{R})$, grazie al Teorema di Plancherel, si deduce che $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

(d) Usando (4) e, grazie alla regolarità di f, la formula di dualità si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(\xi\pi/2) + \cos(3\xi\pi/2)}{1-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\ d\xi = \frac{1}{2}\mathcal{F}[\widehat{f}](0) = \pi f(0) = \pi\,.$$