Analisi Reale e Complessa - a.a. 2006/2007

Quarto appello

Esercizio 1

Siano $\varepsilon > 0$ e $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}.$$

(i) Si provi che $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Si calcoli la trasformata di Fourier $\widehat{f_\varepsilon}$ di f_ε (sugg.: usare metodi di variabile complessa, separando il caso $\omega > 0$ dal caso $\omega < 0$).

(iii) Si calcoli il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di $\widehat{f_\varepsilon}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(iv) Usando (iii), si calcoli il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di f_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (sugg.: può essere utile ricordare che $H = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn})$).

Svolgimento

(i) Si noti che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ essendo $x + i\varepsilon \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $f \in L^2(-1, 1)$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x||f(x)| = 1\,,$$

si deduce che $f \in L^2(\mathbb{R}\backslash]-1, 1[)$, essendo $1/|x| \in L^2(\mathbb{R}\backslash]-1, 1[)$. Dunque $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Grazie al Teorema di Plancherel, per q.o. $\omega \in \mathbb{R}$ si ha

$$\widehat{f_\varepsilon}(\omega) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega x}}{x + i\varepsilon}\, dx\,,$$

una volta appurato che il valor principale dell'integrale in questione esista. Poiché

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{1}{z + i\varepsilon} = 0\,,$$

usando il Lemma di Jordan e il Teorema dei Residui si ricava che

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega x}}{x + i\varepsilon}\, dx = \begin{cases} -2\pi i \operatorname{res}\left(\dfrac{e^{-i\omega z}}{z + i\varepsilon}, -i\varepsilon\right) & \text{se } \omega > 0\,, \\ 0 & \text{se } \omega < 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Essendo $z = -i\varepsilon$ un polo del primo ordine per $z \mapsto e^{-i\omega z}/(z + i\varepsilon)$, si ha

$$\operatorname{res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{z + i\varepsilon}, -i\varepsilon\right) = \lim_{z \to -i\varepsilon} e^{-i\omega z} = e^{-\varepsilon\omega}\,,$$

da cui, usando (1),

$$\widehat{f_\varepsilon}(\omega) = \begin{cases} -2\pi i e^{-\varepsilon\omega} & \text{se } \omega > 0\,, \\ 0 & \text{se } \omega < 0\,. \end{cases}$$

(iii) Fissata una funzione test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle \widehat{f}_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_\varepsilon(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = -2\pi i \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\omega}\varphi(\omega)\, d\omega\,. \tag{2}$$

Si noti che per ogni $\omega > 0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{-\varepsilon\omega}\varphi(\omega) = \varphi(\omega)\,, \qquad |e^{-\varepsilon\omega}\varphi(\omega)| \le |\varphi(\omega)| \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Si può quindi usare il Teorema di Lebesgue per passare al limite nell'integrale in (2), ottenendo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \widehat{f}_\varepsilon, \varphi \rangle = -2\pi i \int_0^{+\infty} \varphi(\omega)\, d\omega = -2\pi i \langle H, \varphi \rangle\,,$$

dove H è la funzione di Heaviside. Dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \widehat{f}_\varepsilon = -2\pi i\, H \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

(iv) Poiché la trasformazione di Fourier conserva la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, detto f il limite di f_ε in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si ha che $\widehat{f} = -2\pi i\, H$. Usando la formula di dualità si ottiene

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[-2\pi i\, H](x) = -i\widehat{H}(x) = -i\left(\pi\delta - i\text{p.v.}\,\frac{1}{x}\right) = -\text{p.v.}\,\frac{1}{x} - \pi i\,\delta\,,$$

da cui si ottiene

$$f = \text{p.v.}\,\frac{1}{x} - \pi i\,\delta\,,$$

essendo p.v.$(1/x)$ dispari e δ pari.

N.B. Per calcolare $\widehat{H}$ è sufficiente osservare che

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x)\,,$$

da cui si ricava

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta - 2i\text{p.v.}\,\frac{1}{\omega}\right) = \pi\delta - i\text{p.v.}\,\frac{1}{\omega}\,.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cosh(1/z)}{1-z}$$

i) Classificare le singolarità di f.

ii) Calcolare il residuo di f in $z_0 = 0$ ed in $z_1 = 1$.

iii) Calcolare, al variare di $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$,

$$\int_{C_\lambda(0)} f(z)\, dz\,,$$

dove $C_\lambda(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio λ.

Svolgimento

(i) Le singolarità di f si trovano nei punti $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale. Infatti

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}\, z=0}} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{\cosh(1/iy)}{1-iy} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(1/y)}{1-iy}$$

e tale limite non esiste. La singolarità $z_1 = 1$ è un polo del primo ordine: infatti

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} -\cosh(1/z) = -\cosh 1 \neq 0\,. \tag{3}$$

(ii) Da (3) si ricava che

$$\mathrm{res}\,(f,1) = -\cosh 1\,.$$

Essendo $z_0 = 0$ una singolarità essenziale per calcolare $\mathrm{res}\,(f,0)$ dobbiamo passare attraverso lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z_0 = 0$. Poiché possiamo supporre $|z| < 1$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\cdot\cosh\frac{1}{z} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}\right) = \sum_{k,n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}z^{k-2n}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\substack{k-2n=j\\ k,n\geq 0}}\frac{1}{(2n)!}\right)z^j\,.$$

Ne segue che

$$\mathrm{res}\,(f,0) = \sum_{\substack{k-2n=-1\\ k,n\geq 0}}\frac{1}{(2n)!} = \sum_{\substack{2n=k+1\\ k,n\geq 0}}\frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!} = \cosh 1 - 1\,.$$

(iii) Grazie al Teorema dei Residui si ha

$$\int_{C_\lambda(0)} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i\,\mathrm{res}\,(f,0) & \text{se } 0<\lambda<1\,,\\ 2\pi i\,\big(\mathrm{res}\,(f,0)+\mathrm{res}\,(f,1)\big) & \text{se } \lambda>1\,,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i\,(\cosh 1 - 1) & \text{se } 0<\lambda<1\,,\\ -2\pi i & \text{se } \lambda>1\,.\end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{per} \quad 0<x<1/2\\ 0 & \text{per} \quad 1/2<x<1.\end{cases}$$

i) Si determini la serie di Fourier della prolungata 2-periodica pari $\tilde{f}$ di f e se ne studi la convergenza (in $L^2(-1,1)$, puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$);

ii) se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}\,;$$

iii) si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni di $\tilde{f}$ e si provi che è una distribuzione temperata.

Svolgimento

(i) La prolungata periodica 2-periodica pari di f (si veda la figura 1) per $-1 < x < 1$ si scrive,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \big|\sin(\pi x)\big| & \text{se } |x| < 1/2\,, \\ 0 & \text{se } 1/2 < |x| < 1\,. \end{cases}$$

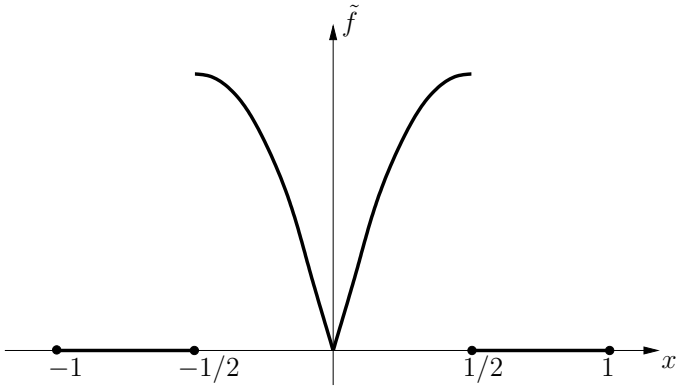

Figura 1

La sua serie di Fourier è pertanto una serie di soli coseni. Calcoliamone i coefficienti di Fourier. Essendo una serie di soli coseni, $b_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Riguardo alla successione degli a_k, per $k = 0, 1$ si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\ dx = 2\int_0^{1/2} \sin(\pi x)\ dx = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{\pi}\,, \\ a_1 &= \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\cos(\pi x)\ dx = 2\int_0^{1/2} \sin(\pi x)\cos(\pi x)\ dx = \int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\ dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{\pi}\,, \end{aligned}$$

e per $k > 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\cos(k\pi x)\ dx = 2\int_0^{1/2} \sin(\pi x)\cos(k\pi x)\ dx \\ &= \int_0^{1/2} \big[\sin(\pi x + k\pi x) + \sin(\pi x - k\pi x)\big]\ dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi(k+1)}\cos(\pi(k+1)x)\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{\pi(k-1)}\cos(\pi(k-1)x)\Big|_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi(k+1)}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right)\right] + \frac{1}{\pi(k-1)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)-1\right] \\
&= \frac{1}{\pi(k+1)}\left[1+\sin k\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{\pi(k-1)}\left[\sin k\frac{\pi}{2}-1\right]] \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{k}{k^2-1}\sin k\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2-1}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi la serie di Fourier di $\tilde{f}$ si scrive

$$
\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{k^2-1}\left(k\sin k\frac{\pi}{2}-1\right)\cos(k\pi x)\right]\,.
$$

Chiaramente la serie converge in $L^2(-1,1)$ essendo $\tilde{f}$ funzione limitata e quindi appartenente a $L^2(-1,1)$. Grazie al criterio di Dini ($\tilde{f}$ è $\mathcal{C}^1$ a tratti), nell'intervallo $]-1,1]$ la serie converge puntualmente a $\tilde{f}(x)$ per $x \neq \pm 1/2$, mentre converge ad $1/2$ per $x = \pm 1/2$. Inoltre la serie non converge uniformemente, essendo $\tilde{f}$ funzione discontinua con

$$
\lim_{x\to\pm 1/2^+}\tilde{f}(x) \neq \lim_{x\to\pm 1/2^-}\tilde{f}(x)\,.
$$

(ii) Per calcolare la somma della serie considerata, si prenda $x = 1/2$ nella serie di Fourier di $\tilde{f}$. Grazie alle osservazioni sulla convergenza si ha

$$
\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{k^2-1}\left(k\sin k\frac{\pi}{2}-1\right)\cos k\frac{\pi}{2}\right]\,. \tag{4}
$$

Poiché

$$
\cos k\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{per } k \text{ dispari}\,,
$$

posto $k = 2j$, (4) si riscrive

$$
\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{4j^2-1}\big(2j\sin(j\pi)-1\big)\cos(j\pi)\Big] = \frac{1}{\pi} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{4j^2-1}\,,
$$

da cui si ricava

$$
\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{1-4j^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{1-4j^2} = \frac{\pi-2}{4}\,.
$$

(iii) Essendo $\tilde{f}$ funzione $\mathcal{C}^1$ a tratti e $x \mapsto \sin(\pi x)$ funzione 2-periodica

$$
\sin(\pi(x+2k) = \sin(\pi x + 2k\pi) = \sin(\pi x)\,,
$$

si ha

$$
\tilde{f}'(x) = \pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\operatorname{sgn}\big(\sin(\pi x)\big)\cos(\pi x)\chi_{]-1/2+2k,1/2+2k[}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{-1/2+2k} - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{1/2+2k}\,.
$$

Esercizio 4

Siano A un insieme misurabile e $u \in L^1(A) \cap L^\infty(A)$. Si provi che $u \in L^2(A)$ e $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty}^{1/2} \|u\|_{L^1}^{1/2}$.

Svolgimento

Si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(A)}^2 &= \int_A |u|^2 = \int_A |u| \cdot |u| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(A)} \int_A |u| = \|u\|_{L^\infty(A)} \|u\|_{L^1(A)} \end{aligned}$$

da cui la tesi.