Analisi Reale e Complessa - a.a. 2006/2007

Quinto appello

Esercizio 1

Siano α un parametro reale e $f = f(x,y)$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\big(|x|+|y|\big)^\alpha}$$

e B_1 il disco unitario di $\mathbb{R}^2$.

1. Si provi che se $\alpha < 4$, allora $f \in L^1(B_1)$.

2. Si mostri che se $2 < \alpha < 4$ la funzione f è sommabile in $\mathbb{R}^2$; per tali valori di α si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy$.

Svolgimento

1. Osserviamo che se $\alpha \leq 0$, f è funzione continua su $\mathbb{R}^2$ e dunque sommabile in B_1. Non ci resta che considerare il caso $0 < \alpha < 4$. Essendo $|\sin t| \leq |t|$, si ha

$$|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{\big(|x|+|y|\big)^\alpha}\,. \tag{1}$$

Si osservi che

$$\big(|x|+|y|\big)^2 \geq x^2+y^2\,,$$

da cui si deduce che

$$\frac{|xy|}{\big(|x|+|y|\big)^\alpha} \leq \frac{|xy|}{\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}}\,. \tag{2}$$

Da (1)-(2) si deduce che se proviamo che per $0 < \alpha < 4$ la funzione

$$(x,y) \mapsto \frac{|xy|}{\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}}$$

appartiene a $L^1(B_1)$, allora possiamo concludere che anche $f \in L^1(B_1)$. Utilizzando le coordinate polari e il teorema di Tonelli si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{B_1} \frac{|xy|}{\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}}\ dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|}{\rho^\alpha}\cdot\rho\ d\rho d\vartheta \leq \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{\alpha-3}}\ d\rho d\vartheta \\ &= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho^{\alpha-3}}\ d\rho\,,\end{aligned}$$

che è finito se e solo se $\alpha - 3 < 1$, cioè se e solo se $\alpha < 4$, come si voleva. Si noti che, osservando che

$$|\cos\vartheta| + |\sin\vartheta| \geq 1 \qquad \forall\vartheta\in\mathbb{R}\,,$$

lo stesso risultato si poteva ottenere usando (1), passando subito in coordinate polari e sfruttando il teorema di Tonelli

$$\int_{B_1} \frac{|xy|}{\big(|x|+|y|\big)^\alpha}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|}{\rho^\alpha\big(|\cos\vartheta|+|\sin\vartheta|\big)^\alpha}\cdot\rho\, d\rho d\vartheta$$

$$=\leq \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{\alpha-3}}\, d\rho d\vartheta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho^{\alpha-3}}\, d\rho\,,$$

e quindi di nuovo l'integrale è convergente se $\alpha < 4$.

2. Grazie a quanto dimostrato al punto 1., è sufficiente provare che se $\alpha > 2$, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1)$. Sfruttando (2) e sapendo che $|\sin t| \leq 1$, si ha

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}}\,.$$

Se dimostriamo che per $\alpha > 2$ la funzione $(x,y) \mapsto 1/\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}$ è sommabile su $R^2 \setminus B_1$, possiamo concludere che lo è anche f. Passando a coordinate polari e di nuovo sfruttando il teorema di Tonelli si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1} \frac{1}{\big(x^2+y^2\big)^{\alpha/2}}\, dxdy = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\, d\rho$$

che è finito se e solo se $\alpha - 1 > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$, come si voleva. Quanto al calcolo dell'integrale, sfruttando il fatto che f è dispari in x (e anche in y) e usando il teorema di Fubini si ottiene facilmente che

$$\int_{R^2} f(x,y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\right)\, dy = 0\,.$$

Esercizio 2

Si scriva una funzione f di variabile complessa olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, i, -1, -i\}$ che abbia una singolarità essenziale in $z = 1$, un polo del primo ordine in $z = i$, un polo del secondo ordine in $z = -1$, una singolarità eliminabile in $z = -i$ e che soddisfi

$$\int_{C_2(0)} f(z)\, dz = 4\pi i\,, \tag{3}$$

dove $C_2(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.
Si studino poi le singolarità della funzione

$$g(z) = \sinh\frac{1}{z-1} - \frac{1-\cos(z+i)}{(z^4-1)^2}$$

e si verifichi se g soddisfa le precedenti condizioni.

Svolgimento

Sia
$$f(z) = e^{1/(z-1)} + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{\sin(z+i)}{z+i}\,.$$
f soddisfa tutte le richieste.

1. In $z = 1$ ha una singolarità essenziale perché tale è $z = 1$ per la funzione $z \mapsto e^{1/(z-1)}$. Infatti, guardando la restrizione di f all'asse reale si ha
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} e^{1/(x-1)} + \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x-i} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\sin(x-i)}{x-i}\right]\\ &= \frac{1}{1-i} + \frac{1}{4} + \frac{\sin(1+i)}{1+i}\,,\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} e^{1/(x-1)} + \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-i} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\sin(x+i)}{x+i}\right] = +\infty\,,\end{aligned}$$
da cui si deduce che $z \mapsto f(z)$ non ha limite per $z \to 1$.

2. Essendo
$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)e^{1/(z-1)} + 1 + (z-i)\frac{1}{(z+1)^2} + (z-i)\frac{\sin(z+i)}{z+i}\right] = 1\,, \tag{4}$$
$z = i$ è polo del primo ordine per f.

3. Essendo
$$\lim_{z\to -1}(z+1)^2 f(z) = \lim_{z\to i}\left[(z+1)^2 e^{1/(z-1)} + \frac{(z+1)^2}{z-i} + 1 + (z+1)\frac{\sin(z+i)}{z+i}\right] = 1\,,$$
$z = -1$ è polo del secondo ordine per f.

4. Essendo
$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i}\left[e^{1/(z-1)} + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z+1)^2}\right] + \lim_{z\to -i}\frac{\sin(z+i)}{z+i} = e^{-1/(i+1)} - i + 1\,,$$
$z = -i$ è singolarità eliminabile per f.

5. Grazie al Teorema dei Residui, e osservando che $\operatorname{res}(f,-i) = 0$ perché $z = -i$ è singolarità eliminabile, si ha
$$\int_{C_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i\big[\operatorname{res}(f,1) + \operatorname{res}(f,i) + \operatorname{res}(f,-1)\big]\,.$$
Calcoliamo i tre residui coinvolti. Dalla definizione di residuo discende immediatamente che, se $z_0 \in \mathbb{C}$, si ha
$$\operatorname{res}(f,z_0) = \operatorname{res}(e^{1/(z-1)},z_0) + \operatorname{res}(1/(z-i),z_0) + \operatorname{res}(1/(z+1)^2,z_0)\,. \tag{5}$$

Se ne deduce che

$$\operatorname{res}(f,1) = \operatorname{res}(e^{1/(z-1)},1) = 1 \tag{6}$$
$$\operatorname{res}(f,i) = \operatorname{res}(1/(z-i),i) = 1 \tag{7}$$
$$\operatorname{res}(f,-1) = \operatorname{res}(1/(z+1)^2,-1) = 0\,, \tag{8}$$

da cui, usando (5), si deduce (3). Infatti, (6) vale perché

(a) $z \mapsto 1/(z-i)$ e $z \mapsto 1/(z+1)^2$ sono derivabili in un intorno di $z=1$ e quindi il loro sviluppo di Laurent non ha parte singolare, da cui si deduce che i rispettivi residui in $z=1$ sono nulli;

(b) Lo sviluppo di Laurent di $z \mapsto e^{1/(z-1)}$ in un intorno bucato di $z=1$ è

$$e^{1/(z-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{(z-1)^k} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \dots\,,$$

per cui il coefficiente di $(z-1)^{-1}$ è 1.

(7) discende da (4). Altrimenti, usando (5), si può notare che

(a) $z \mapsto e^{1/(z-1)}$ e $z \mapsto 1/(z+1)^2$ sono derivabili in un intorno di $z=i$ e quindi il loro sviluppo di Laurent non ha parte singolare, da cui si deduce che i rispettivi residui in $z=i$ sono nulli;

(b) Lo sviluppo di Laurent di $z \mapsto 1/(z-i)$ in un intorno bucato di $z=i$ è $1/(z-i)$ per cui il coefficiente di $(z-i)^{-1}$ è 1.

(8) vale perché

(a) $z \mapsto e^{1/(z-1)}$ e $z \mapsto 1/(z-i)$ sono derivabili in un intorno di $z=-1$ e quindi il loro sviluppo di Laurent non ha parte singolare, da cui si deduce che i rispettivi residui in $z=-1$ sono nulli;

(b) Lo sviluppo di Laurent di $z \mapsto 1/(z+1)^2$ in un intorno bucato di $z=-1$ è $1/(z+1)^2$ per cui il coefficiente di $(z+1)^{-1}$ è 0.

Verifichiamo ora il comportamento di g. Osserviamo che poiché le radici di z^4-1 sono $z=\pm 1$ e $z=\pm i$, g si può riscrivere come

$$g(z) = \sinh\frac{1}{z-1} + \frac{1-\cos(z+i)}{(z-1)^2(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2}\,,$$

dal che si deduce che g ha un polo del secondo ordine in $z=i$ e quindi non soddisfa le condizioni date. Infatti

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 g(z) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\sinh\frac{1}{z-1} + \frac{1-\cos(z+i)}{(z-1)^2(z+1)^2(z+i)^2}\right] = \frac{\cos(2i)-1}{16}\,.$$

Studiamo ora le altre singolarità di g.

1. In $z=1$ g ha una singolarità essenziale. Infatti

(a) $z = 1$ è una singolarità essenziale per la funzione $z \mapsto \sinh 1/(z-1)$ perché il suo sviluppo di Laurent in un intorno bucato di $z = 1$ è

$$\sinh \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2k+1}}$$

che contiene un numero infinito di potenze negative di $z - 1$;

(b) la funzione

$$z \mapsto \frac{1-\cos(z+i)}{(z-1)^2(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2}$$

ha un polo del secondo ordine in $z = 1$ essendo

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)^2 \frac{1-\cos(z+i)}{(z-1)^2(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2} &= \lim_{z\to 1} \frac{1-\cos(z+i)}{(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2} \\ &= \frac{1-\cos(1+i)}{16} .\end{aligned}$$

Da (a) e (b) segue che lo sviluppo di Laurent di g in un intorno bucato di $z = 1$ contiene un numero infinito di potenze negative di $z - 1$.

2. In $z = -1$ g ha un polo del secondo ordine perché

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -1}(z+1)^2 g(z) &= \lim_{z\to -1}(z+1)^2 \sinh \frac{1}{z-1} + \lim_{z\to -1} \frac{1-\cos(z+i)}{(z-1)^2(z-i)^2(z+i)^2} \\ &= \frac{1-\cos(i-1)}{16} .\end{aligned}$$

3. In $z = -i$ g ha una singolarità eliminabile perché

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i} g(z) &= \lim_{z\to -i} \sinh \frac{1}{z-1} + \lim_{z\to -i} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2(z-i)^2} \cdot \frac{1-\cos(z+i)}{(z+i)^2} \\ &= -\sinh \frac{1}{i+1} - \frac{1}{16} \cdot \lim_{w\to 0} \frac{1-\cos w}{w^2} = -\sinh \frac{1}{i+1} - \frac{1}{32} .\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (\tanh x) \cdot e^{-|x-n|} & \text{se} \quad x > 0 , \\ e^{-n} & \text{se} \quad x \leq 0 , \end{cases}$$

(si ricordi che $\tanh x = \sinh x / \cosh x$).

1. Si calcoli il limite puntuale di $\{f_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to +\infty$.

2. Si verifichi se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ oppure in $[-1, 1]$.

3. Si verifichi se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento

1. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-|x-n|} = 0\,,$$
e $x \mapsto \tanh x$ è funzione continua su $\mathbb{R}$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Il candidato limite uniforme di $\{f_n\}_{n\geq 1}$ è la funzione nulla. Affinché $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converga uniformemente in $\mathbb{R}$ deve essere
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 0\,.$$
Ma
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n(n) = \tanh n \to 1 \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$
e quindi $\{f_n\}_{n\geq 1}$ non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Quanto alla convergenza uniforme in $[-1,1]$, si osservi che per $n \geq 1$ si ha
$$|(\tanh x)\cdot e^{-|x-n|}| \leq (\tanh 1)\cdot e^{-|1-n|} \leq e^{1-n} \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$
Poiché $f_n(x) = e^{-n}$ per $x \in [-1, 0[$, se ne deduce che
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| \leq e^{1-n} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$
e quindi $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente alla funzione nulla in $[-1,1]$.

3. Dimostriamo che $f_n \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; la convergenza a 0 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ottiene come conseguenza, perché la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ implica quella in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sia allora $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Poiché $|(\tanh x)\cdot e^{-|x-n|}| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha
$$|f_n(x)\varphi(x)| \leq \|f_n\|_\infty |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})\,,$$
e quindi usando il Teorema di Convergenza Dominata si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\varphi(x)\Big]\,dx = 0\,,$$
come si voleva.

Esercizio 4

Si calcoli con metodi di variabile complessa la trasformata di Fourier di
$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Se ne deduca un'espressione esplicita per il prodotto di convoluzione $g * g$, dove $g(x) = e^{-|x|}$.

Svolgimento

f è funzione sommabile su $\mathbb{R}$ essendo continua, e dunque localmente sommabile, e infinitesima di ordine 4 per $x \to \pm\infty$. Quindi la sua trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

ed è funzione continua reale pari essendo tale f. Calcoliamola quindi solo per $\omega > 0$, e poi la prolungheremo per parità. Estendiamo f al campo complesso, e quindi consideriamo la funzione

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}\,, \qquad z \neq \pm i\,.$$

Poiché $\widetilde{f}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ e vale

$$\lim_{z\to\infty} \widetilde{f}(z) = 0\,,$$

siamo nelle condizioni di applicare il Lemma di Jordan. Usando questo e il Teorema dei Residui si ottiene che

$$\widehat{f}(\omega) = -2\pi i \operatorname{res}\big(\widetilde{f}(z)e^{-i\omega z}, -i\big) \qquad \text{per} \quad \omega > 0\,. \tag{9}$$

Poiché

$$\lim_{z\to -i} (z+i)^2 \widetilde{f}(z)^{-i\omega z} = \lim_{z\to -i} \frac{^{-i\omega z}}{(z-i)^2} = -\frac{e^{-\omega}}{4}\,,$$

$z = -i$ è un polo del secondo ordine per $z \mapsto \widetilde{f}(z)e^{-i\omega z}$, e quindi

$$\operatorname{res}\big(\widetilde{f}(z)e^{-i\omega z}, -i\big) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\big[(z+i)^2 \widetilde{f}(z)e^{-i\omega z}\big] = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \frac{e^{-i\omega z}}{(z-i)^2}$$
$$= -\lim_{z\to -i} e^{-i\omega z} \frac{(i\omega)(z-i)+2}{(z-i)^3} = -e^{-\omega}\frac{\omega+1}{4i}\,.$$

Usando in (9) quanto appena trovato si ottiene

$$\widehat{f}(\omega) = \pi e^{-\omega}\frac{\omega+1}{2} \qquad \text{per} \quad \omega > 0\,,$$

da cui, grazie alle osservazioni sulle proprietà di cui gode $\widehat{f}$,

$$\widehat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}\frac{|\omega|+1}{2}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Consideriamo ora la seconda domanda. Grazie al comportamento della trasformata di Fourier rispetto alla convoluzione e ricordando che

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}\,,$$

si ha che

$$\mathcal{F}[g*g](\omega) = \widehat{g}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) = \frac{4}{(\omega^2+1)^2}\,.$$

Grazie alla formula di dualità si ottiene

$$g*g(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[g*g]\big](-x) = \frac{2}{\pi}\widehat{f}(-x) = e^{-|x|}\big(|x|+1\big)\,.$$