

ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 11.12.2007

Tema 1

Esercizio 1 [7 punti]

Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{1+x^2+y^2}}{1 + (x^2 + y^2)^\alpha}$$

è sommabile in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 2 [9 punti]

Sia $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})\}$.

1. Si provi che $\|f\| = \|f\|_1 + \|f''\|_1$ definisce una norma in F .

2. Si provi che per ogni $f \in F$ esiste un'unica $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} u(y) dy = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

3. Sia $T : F \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ l'operatore che ad ogni $f \in F$ associa la soluzione u di (1). Si provi che T è lineare e continuo.

Esercizio 3 [9 punti]

(i) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2(z^2 + 1)^2}$$

se ne studino le singolarità e se ne calcolino i residui nei poli con parte immaginaria ≥ 0 .

(ii) Si provi che la funzione

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

è sommabile in \mathbb{R} e si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$. (Sugg.: usare le formule di bisezione)

(iii) Si classifichino le singolarità di $h(z) = f(z)/\sinh(\pi z)$.

Esercizio 4 [7 punti]

Si consideri la prolungata 2-periodica \tilde{f} della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{per } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f e si studi la convergenza della relativa serie (L^2 , puntuale e uniforme).

(ii) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{(2k+1)^4 \pi^2} \right).$$

Esercizio 5 [facoltativo]

Si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione

$$f(x) = e^{|x| - \operatorname{sgn} x} + x \chi_{[-1,1]}(x).$$

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 11.12.2006

Tema 2

Esercizio 1 [7 punti]

Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x, y) = \frac{x(1 - \cos \frac{1}{1+x^2+y^2})}{1 + (x^2 + y^2)^\alpha}$$

è sommabile in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 2 [9 punti]

Sia $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})\}$.

1. Si provi che $\|f\| = \|f\|_1 + \|f''\|_1$ definisce una norma in F .
2. Si provi che per ogni $f \in F$ esiste un'unica $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|x-y|} u(y) dy = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

3. Sia $T : F \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ l'operatore che ad ogni $f \in F$ associa la soluzione u di (1). Si provi che T è lineare e continuo.

Esercizio 3 [9 punti]

- (i) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2 + 4)^2}$$

se ne studino le singolarità e se ne calcolino i residui nei poli con parte immaginaria ≥ 0 .

- (ii) Si provi che la funzione

$$g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2 + 4)^2}$$

è sommabile in \mathbb{R} e si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$.

- (iii) Si classifichino le singolarità di $h(z) = f(z)/\sin(2\pi iz)$.

Esercizio 4 [7 punti]

Si consideri la prolungata 2-periodica \tilde{f} della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (i) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f e si studi la convergenza della relativa serie (L^2 , puntuale e uniforme).
- (ii) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{4}{(2k+1)^4\pi^4} \right).$$

Esercizio 5 [facoltativo]

Si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione

$$f(x) = e^{|x|+\operatorname{sgn} x} + x^2 \chi_{]-1,1[}(x).$$

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.