

ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 7.1.2008

Tema 1

Esercizio 1 [7 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{per } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{per } |x| > 2. \end{cases}$$

- (i) Si calcoli la derivata seconda nel senso delle distribuzioni di f ;
- (ii) se ne calcoli la trasformata di Fourier (in funzione della trasformata \widehat{f} di f);
- (iii) se ne deduca la trasformata di f e se ne studino le proprietà di simmetria, di sommabilità e di differenziabilità specificando quali risultati generali le prevedono;
- (iv) se ne deduca il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega}{2} d\omega.$$

Esercizio 2 [7 punti]

Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{1 + |x|^2} + e^{-|x|} \chi_{[-n, n]}(x).$$

Si studi la convergenza puntuale, uniforme, $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ di $\{f_n\}_{n \geq 1}$.

Esercizio 3 [9 punti]

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} e^{\frac{1}{(1-z)^2}}.$$

- (i) Se ne studino le singolarità e si calcolino i relativi residui;
- (ii) si scriva la parte principale dello sviluppo di Laurent di f convergente in un disco bucato centrato in $z = 2$;
- (iii) si discuta al variare di $r > 0$ l'esistenza dell'integrale

$$\int_{C_r} f(z) dz,$$

dove C_r è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine e lo si calcoli ove possibile.

Esercizio 4 [9 punti]

- (i) Sia $f(x) = e^{-2|x|} \frac{\sin 3x}{x}$; si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Siano $g(x) = \frac{2}{4+x^2}$ e $h(x) = \chi_{[-3,3]}(x)$; si calcoli mediante integrazione diretta il prodotto di convoluzione $g * h$ e se ne deduca il valore di \widehat{f} .
- (iii) Si calcoli il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ della successione $kf(kx)$.
- (iv) (facoltativo) Si calcoli $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Esercizio 5 [facoltativo]

Sia $T = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2} \delta(x-k)$. Si dica se T è una distribuzione e se è una distribuzione temperata.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 7.1.2008
Tema 2

Esercizio 1 [7 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1. \end{cases}$$

- (i) Si calcoli la derivata seconda nel senso delle distribuzioni di f ;
- (ii) se ne calcoli la trasformata di Fourier (in funzione della trasformata \widehat{f} di f);
- (iii) se ne deduca la trasformata di f e se ne studino le proprietà di simmetria, di sommabilità e di differenziabilità specificando quali risultati generali le prevedono;
- (iv) se ne deduca il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{4\pi^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega}{4} d\omega.$$

Esercizio 2 [7 punti]

Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = e^{-x^2} \chi_{[-n, n]}(x) + \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|^2}{|x|^3 + 1}.$$

Si studi la convergenza puntuale, uniforme, $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ di $\{f_n\}_{n \geq 1}$.

Esercizio 3 [9 punti]

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2} e^{\frac{1}{(2-z)^2}}.$$

- (i) Se ne studino le singolarità e si calcolino i relativi residui;
- (ii) si scriva la parte principale dello sviluppo di Laurent di f convergente in un disco bucato centrato in $z = 3$;
- (iii) si discuta al variare di $r > 0$ l'esistenza dell'integrale

$$\int_{C_r} f(z) dz,$$

dove C_r è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine e lo si calcoli ove possibile.

Esercizio 4 [9 punti]

- (i) Sia $f(x) = e^{-3|x|} \frac{\sin 2x}{x}$; si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Siano $g(x) = \frac{3}{9+x^2}$ e $h(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$; si calcoli mediante integrazione diretta il prodotto di convoluzione $g * h$ e se ne deduca il valore di \widehat{f} .
- (iii) Si calcoli il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ della successione $kf(kx)$.
- (iv) (facoltativo) Si calcoli $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Esercizio 5 [facoltativo]

Sia $T = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2} \delta(x-k)$. Si dica se T è una distribuzione e se è una distribuzione temperata.

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.