

# ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

## Appello del 16.6.2008

### Esercizio 1 [8 punti]

Si scriva una funzione  $f$  di variabile complessa olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{1, 4i, -4\}$  che abbia una singolarità essenziale in  $z = 4i$ , un polo del primo ordine in  $z = 1$ , un polo del secondo ordine in  $z = -4$ , e che soddisfi

$$\int_{C_5(0)} f(z) dz = 5\pi i,$$

dove  $C_5(0)$  è la circonferenza di centro l'origine e raggio 5 percorsa una volta in senso antiorario.

Si calcoli poi il seguente integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{(1 - \cos(\pi z))^2 f(z)}{(z - 2)^4} dz.$$

### Esercizio 2 [8 punti]

Si studino le convergenze puntuale ed uniforme in  $\mathbb{R}$ ,  $L^1_{loc}$ ,  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  della successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^{-n/|x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

### Esercizio 3 [7 punti]

Provare che per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$  esiste un'unica  $u \in L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = f(x)$$

per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

(Sugg.: trovare un'espressione di  $u$  che coinvolga un prodotto di convoluzione)

### Esercizio 4 [9 punti]

Siano  $f_d$  e  $f_p$  rispettivamente le prolungate  $2\pi$ -periodiche dispari e pari della funzione  $f : [0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = x^2$ .

1. Si calcolino i coefficienti di Fourier di  $f_p$
2. Si calcolino i coefficienti di Fourier di  $f_d$ .
3. Si studino la convergenza puntuale, uniforme e  $L^2(-\pi, \pi)$  delle serie di Fourier di  $f_d$  e  $f_p$ .
4. Si ricavi la somma delle serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{4(-1)^j}{\pi^2(2j+1)^3} \right], \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

---

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

**Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.**