ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 18.9.2008

Esercizio 1 [16 punti]
Siano date le funzioni $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -\pi/2 < x < \pi/2\,, \\ \dfrac{2}{\pi}(\pi - |x|) & \text{se} \quad \pi/2 \le |x| \le \pi\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad -\pi \le x \le \pi\,, \\ 0 & \text{se} \quad |x| > \pi\,. \end{cases}$$

a) Provare che la serie di Fourier di f converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

b) Detta $\widetilde{f}$ la prolungata 2π-periodica di f, provare che $\widetilde{f}' \in L^2(-\pi, \pi)$, calcolare i coefficienti di Fourier di $\widetilde{f}'$ e studiare la convergenza puntuale della relativa serie di Fourier.

c) Dedurre da b) lo sviluppo in serie di Fourier di f.

d) Sia $\widetilde{f}_n$ la funzione definita da $\widetilde{f}_n(x) = \widetilde{f}(x)\chi_{[-(2n+1)\pi,(2n+1)\pi]}(x)$, $n \ge 1$. Provare che $\mathcal{F}[\widetilde{f}_n] \to \mathcal{F}[\widetilde{f}]$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

e) Dedurre da a) e b) la trasformata di Fourier di $\widetilde{f}$ (nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$).

f) Calcolare g'' nel senso delle distribuzioni, calcolarne la trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ e dedurne la trasformata di Fourier di g.

Nota: le domande d) ed f) sono indipendenti dalle altre.

Esercizio 2 [8 punti]
Sia $T : C^0([-1, 1]) \to C^0([0, 1])$ il funzionale definito da $Tf(x) = f(2x^2 - 1)$.

a) Si provi che T è lineare e continuo se in $C^0([-1, 1])$ e in $C^0([0, 1])$ si considera la norma del sup.

b) T rimane lineare e continuo se si dota $C^0([0, 1])$ della norma $\|\cdot\|_1$?

Esercizio 3 [8 punti]
Sia $m \in \mathbb{Z}$ e si ponga

$$f_m(z) = \frac{e^z - 1}{(z - 2\pi i)^m}\,, \qquad g(z) = \frac{\sinh z}{\sin z}\,.$$

a) Si classifichino le singolarità di f_m e si calcoli

$$\int_{C_{3\pi}(0)} f_m(z)\, dz$$

al variare di $m \in \mathbb{Z}$, dove $C_{3\pi}(0)$ indica la circonferenza centrata nell'origine e raggio 3π percorsa una volta in senso antiorario.

b) Si classifichino le singolarità di g.

c) Si classifichino le singolarità di $h(z) = f_m(z) \cdot g(z)$ al variare di $m \in \mathbb{Z}$.

Tempo a disposizione: due ore e trenta minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.