Analisi Reale e Complessa - a.a. 2007/2008

Primo appello - Tema 1

Esercizio 1

Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x,y) = \frac{x \sin \frac{1}{1+x^2+y^2}}{1+(x^2+y^2)^\alpha}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento

Si osservi che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ se $\alpha \geq 0$, mentre se $\alpha < 0$ può essere prolungata per continuità in $(0,0)$ essendo in tal caso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

Allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $f \in L^1(B_1((0,0))$. Se troviamo per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $f \in L^1\big(\mathbb{R}^2 \setminus B_1((0,0))\big)$, l'esercizio è concluso. Utilizzando le coordinate polari e il teorema di Tonelli si trova

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1((0,0))} |f(x,y)|\;dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\rho|\cos\vartheta||\sin(1/(1+\rho^2))|}{1+\rho^{2\alpha}}\rho\;d\rho d\vartheta \\
&= \left(\int_0^{2\pi}|\cos\vartheta|\;d\vartheta\right)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\rho^2}{1+\rho^{2\alpha}}\sin\frac{1}{1+\rho^2}\;d\rho\right) \\
&= 4\int_1^{+\infty}\frac{\rho^2}{1+\rho^{2\alpha}}\sin\frac{1}{1+\rho^2}\;d\rho\,.
\end{aligned}$$

Si osservi che la funzione integranda è continua sulla semiretta $[1,+\infty[$. Inoltre, se $\alpha \leq 0$

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\rho^2}{1+\rho^{2\alpha}}\sin\frac{1}{1+\rho^2} = \lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{1+\rho^{2\alpha}}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}(1+\rho^2)\sin\frac{1}{1+\rho^2} = \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0\,,\\ 1 & \text{se } \alpha < 0\,,\end{cases}$$

e dunque la funzione integranda non è sommabile. Se $\alpha > 0$, si trova

$$\lim_{\rho\to+\infty}\rho^{2\alpha}\frac{\rho^2}{1+\rho^{2\alpha}}\sin\frac{1}{1+\rho^2} = \lim_{\rho\to+\infty}\frac{\rho^{2\alpha}}{1+\rho^{2\alpha}}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}(1+\rho^2)\sin\frac{1}{1+\rho^2} = 1\,,$$

da cui si deduce che f è sommabile se e solo se la funzione $\rho \mapsto 1/\rho^{2\alpha}$ è sommabile in $]1,+\infty[$, cioè se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 2

Sia $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})\}$.

1. Si provi che $\|f\| = \|f\|_1 + \|f''\|_1$ definisce una norma in F.

2. Si provi che per ogni $f \in F$ esiste un'unica $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} u(y)\, dy = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

3. Sia $T : F \to L^1(\mathbb{R})$ l'operatore che ad ogni $f \in F$ associa la soluzione u di (1). Si provi che T è lineare e continuo.

Svolgimento

1. Per dimostrare che è una norma, verifichiamo le proprietà che definiscono ne definiscono una.

   (a) Per ogni $f \in F$ vale $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0$ se e solo se $f \equiv 0$
   Che sia $\|f\| \geq 0$ è banale perché $\|f\|$ è somma di quantità positive. Supponiamo $\|f\| = 0$. Allora $\|f\|_1 = 0$ e quindi $f = 0$ q.o., ma essendo f continua si deduce $f \equiv 0$. Che la norma della funzione nulla sia zero è banale, essendo nullo l'integrale della funzione nulla.

   (b) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ per ogni $\alpha \in C$.
   Poiché $(\alpha f)'' = \alpha f''$ e $\|\cdot\|_1$ è una norma, si ha

   $$\|\alpha f\| = \|\alpha f\|_1 + \|\alpha f''\|_1 = |\alpha| \|f\|_1 + |\alpha| \|f''\|_1 = |\alpha| \|f\|\,.$$

   (c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ per ogni $f, g \in F$.
   Grazie ancora al fatto che $\|\cdot\|_1$ è una norma, si ha

   $$\|f + g\| = \|f + g\|_1 + \|f'' + g''\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f''\|_1 + \|g\|_1 + \|g''\|_1 = \|f\| + \|g\|\,.$$

2. Posto $\varphi(x) = e^{-2|x|}$, l'equazione può essere riscritta come

$$\varphi * u(x) = f(x)\,.$$

Se $u \in L^1(\mathbb{R})$, essendo $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ la convoluzione ha senso e risulta $\varphi * u \in L^1(\mathbb{R})$. Trasformando alla Fourier ambo i membri dell'equazione e sfruttando il fatto che la trasformata di una convoluzione è il prodotto delle trasformate, si ottiene

$$\frac{4}{4 + \omega^2} \widehat{u}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\,,$$

da cui si ottiene

$$\widehat{u}(\omega) = \frac{1}{4}(4 + \omega^2) \widehat{f}(\omega)\,. \tag{1}$$

Si osservi che essendo $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, vale $\widehat{f''}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}(\omega)$, e quindi da (1) si ricava che necessariamente

$$u(x) = f(x) - \frac{1}{4} f''(x)\,.$$

Essendo $f, f'' \in L^1(\mathbb{R})$, anche $u \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre u è unica perché la sua trasformata di Fourier deve necessariamente soddisfare (1) e la trasformata di Fourier in L^1 è iniettiva.

3. L'operatore T si scrive $T(f) = f - \frac{1}{4}f''$ e risulta lineare essendo

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha\left(f - \frac{1}{4}f''\right) + \beta\left(g - \frac{1}{4}g''\right) = \alpha T(f) + \beta T(g)\,.$$

Riguardo alla continuità, bisogna dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $f \in F$ vale

$$\|T(f)\|_1 \le C\|f\|\,. \tag{2}$$

Usando la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\|T(f)\|_1 = \left\|f - \frac{1}{4}f''\right\|_1 \le \|f\|_1 + \frac{1}{4}\|f''\|_1 \le \|f\|\,,$$

cosicché (2) vale con $C = 1$.

Esercizio 3

(i) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2(z^2+1)^2}$$

se ne studino le singolarità e si calcolino i residui nei poli con parte immaginaria ≥ 0.

(ii) Si provi che la funzione

$$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+1)^2}$$

è sommabile in $\mathbb{R}$ e si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$. (Sugg.: usare le formule di bisezione)

(iii) Si classifichino le singolarità di $h(z) = f(z)/\sinh(\pi z)$.

Svolgimento

(i) Le singolarità di f si trovano nei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano $z^2(z^2+1)^2 = 0$ e dunque sono $z_1 = 0$, $z_2 = i$ e $z_3 = -i$. z_1 è uno zero di molteplicità 2 del denominatore e di molteplicità 1 del numeratore, essendo

$$(e^{2iz} - 1)\Big|_{z=0} = 0\,, \qquad \frac{d}{dz}(e^{2iz} - 1)\Big|_{z=0} = 2ie^{2iz}\Big|_{z=0} = 2i \ne 0\,.$$

Se ne deduce che z_1 è un polo di ordine 1 per f. I punti z_2 e z_3 sono zeri di molteplictà 2 del denominatore, ma non annullano il numeratore, e quindi sono poli di ordine 2 per f. Riguardo ai residui, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}\,(f,0) &= \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{z(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz}(e^{2iz}-1)\Big|_{z=0} = 2i\,,\\
\mathrm{res}\,(f,i) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2iz}-1}{z^2(z+i)^2}\right)\\
&= \lim_{z\to i}\frac{2ie^{2iz}z^2(z+i)^2 - (e^{2iz}-1)[2z(z+i)^2 + 2z^2(z+i)]}{z^4(z+i)^4}\\
&= \lim_{z\to i} 2\frac{e^{2iz}(iz^2 - 3z - i) + 2z + i}{z^3(z+i)^3} = \frac{5e^{-2}-3}{4}i\,.
\end{aligned}$$

(ii) Si osservi che essendo
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1\,,$$
g è prolungabile per continuità su tutta la retta reale: allora $g \in L^1(-r,r)$ per ogni $r>0$. Inoltre, poiché
$$\left|\frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+1)^2}\right| \le \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{|x|\to+\infty} x^6 \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = 1\,,$$
risulta anche $g \in L^1(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$, essendo $x \mapsto 1/x^6$ funzione di $L^1(\mathbb{R}\setminus]-1,1[)$: quindi g è sommabile su $\mathbb{R}$. Calcoliamone l'integrale. Si osservi che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2(x^2+1)^2}\ dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}-1}{x^2(x^2+1)^2}\ dx\right)\,.$$
Per procedere con il calcolo, utilizziamo metodi di analisi complessa sfruttando la funzione f di cui in (i). Abbiamo osservato che f ha sull'asse reale solo la singolarità in $z_1 = 0$, che è un polo semplice e dunque sono soddisfatte le ipotesi del lemma del cerchio piccolo. Inoltre, se γ_R è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio $R>0$ contenuta nel semipiano $\mathrm{Re}\, z \ge 0$, essendo
$$\lim_{z\to\infty} z\frac{1}{z^2(z^2+1)^2} = 0$$
sono soddisfatte le ipotesi del lemma di Jordan e del lemma del cerchio grande e dunque
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\ dz = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\gamma_R}\frac{e^{2iz}}{z^2(z^2+1)^2}\ dz - \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^2(z^2+1)^2}\ dz\right] = 0\,.$$
Sfruttando queste osservazioni e usando il teorema dei residui, si ottiene
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}-1}{x^2(x^2+1)^2}\ dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i \,\mathrm{res}\,(f,i) + \pi i\,\mathrm{res}\,(f,0)\right] = \frac{5e^{-2}-3}{4}\pi + \pi\,.\end{aligned}$$

(iii) I punti di singolarità di h, oltre a quelli di f, sono gli zeri di $z \mapsto \sinh(\pi z)$, cioè i punti $z = ki$ con $z \in \mathbb{Z}$. Tali punti sono tutti zeri di molteplicità 1 essendo
$$\frac{d}{dz}\sinh(\pi z)\Big|_{z=ki} = \pi\cosh(\pi z)\Big|_{z=ki} = \pi(-1)^k \neq 0\,.$$
Sfruttando quanto già sappiamo sui poli di f, si ottiene che

(a) $z=0$ è zero di molteplicità 3 per il denominatore di h e di molteplicità 1 per il numeratore, e quindi è polo del secondo ordine per h;

(b) $z = \pm i$ sono zeri di molteplicità 3 per il denominatore di h e non sono zeri del numeratore, e quindi sono poli del terzo ordine per h;

(c) $z = ki$ con $k \neq 0, \pm 1$ sono zeri di molteplicità 1 per il denominatore di h e non sono zeri del numeratore essendo
$$(e^{2iz}-1)\Big|_{z=ki} = e^{-2k}-1 \neq 0 \quad \text{per} \quad k \neq 0\,,$$
e quindi sono poli semplici per h.

Esercizio 4

Si consideri la prolungata 2-periodica $\tilde{f}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & \text{per} \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f e si studi la convergenza della relativa serie.

(ii) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{(2k+1)^4 \pi^2} \right) .$$

Svolgimento

(i) $\tilde{f}$ non ha particolari simmetrie e quindi conviene calcolare la sua serie di Fourier in forma esponenziale,

$$s[\tilde{f}](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi x} .$$

Si ottiene per $k = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} ,$$

e per $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) e^{-ik\pi x}\, dx = \int_0^1 x e^{-ik\pi x}\, dx = -\frac{1}{ik\pi} x e^{-ik\pi x} \Big|_0^1 + \frac{1}{ik\pi} \int_0^1 e^{-ik\pi x}\, dx \\ &= -\frac{1}{ik\pi} e^{-ik\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} e^{-ik\pi x} \Big|_0^1 = \frac{(-1)^{k+1}}{ik\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} \left[(-1)^k - 1 \right] \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{ik\pi} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \dfrac{1}{ik\pi} - \dfrac{2}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Riguardo alla convergenza della serie, essendo $\tilde{f}$ limitata, essa appartiene ad $L^2(-1,1)$ e quindi la sua serie di Fourier converge in tale spazio. Inoltre $\tilde{f}$ soddisfa le ipotesi del Criterio di Dini con le condizioni di Hölder, e quindi la sua serie di Fourier converge puntualmente. In particolare si ha

$$s[\tilde{f}](x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{se } x \neq 1 + 2k \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} , \\ 1 & \text{se } x = 1 + 2k \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

essendo $\tilde{f}$ discontinua, la sua serie di Fourier non converge uniformemente (e quindi neanche totalmente).

(ii) Si osservi che

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ è pari, } k \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{k^2\pi^2} + \dfrac{4}{k^4\pi^4} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Se ne deduce che

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = c_0^2 + \frac{8}{\pi^4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{(2k+1)^4\pi^2}\right)$$

e quindi usando l'identità di Parseval

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{(2k+1)^4\pi^2}\right) &= \frac{\pi^2}{2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 - c_0^2 - \frac{8}{\pi^4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 4x^2\,dx - \frac{1}{4} - \frac{8}{\pi^4}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{5}{12} - \frac{8}{\pi^4}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 5 (Facoltativo)

Si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione

$$f(x) = e^{|x|-\operatorname{sgn} x} + x\chi_{]-1,1[}(x)\,.$$

Svolgimento

La funzione è $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in 0 e ± 1. Poiché nei punti dove f è derivabile vale

$$Df(x) = (\operatorname{sgn} x)e^{|x|-\operatorname{sgn} x} + \chi_{]-1,1[}(x)\,,$$

si ottiene che la derivata f' di f nel senso delle distribuzioni si scrive

$$f'(x) = (\operatorname{sgn} x)e^{|x|-\operatorname{sgn} x} + \chi_{]-1,1[}(x) + (e^{-1} - e)\delta_0 - \delta_{-1} - \delta_1\,.$$