

Analisi Reale e Complessa - a.a. 2007/2008

Secondo appello - Tema 1

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{per } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{per } |x| > 2. \end{cases}$$

- (i) Si calcoli la derivata seconda nel senso delle distribuzioni di f ;
- (ii) se ne calcoli la trasformata di Fourier (in funzione della trasformata $\widehat{f}$ di f);
- (iii) se ne deduca la trasformata di f e se ne studino le proprietà di simmetria, di sommabilità e di differenziabilità specificando quali risultati generali le prevedono;
- (iv) se ne deduca il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega}{2} d\omega.$$

Svolgimento

- (i) f è banalmente funzione continua in $\mathbb{R}$, essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = 0 = f(0),$$

ed è di classe $\mathcal{C}^1$ negli intervalli $] -\infty, -2[,] -2, 2[$ e $]2, +\infty[$. Quindi la sua derivata nel senso delle distribuzioni è

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x) \chi_{]-2, 2[}(x),$$

che è funzione di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in $x = \pm 2$. Allora

$$f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x) \chi_{]-2, 2[}(x) + \pi \delta_{-2} - \pi \delta_2 = -\pi^2 f(x) + \pi \delta_{-2} - \pi \delta_2.$$

- (ii) Da (i) si ricava

$$\widehat{f''}(\omega) = -\pi^2 \widehat{f}(\omega) + \pi(e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}) = -\pi^2 \widehat{f}(\omega) + 2\pi i \sin 2\omega.$$

- (iii) Poiché $\widehat{f''}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}(\omega)$, da (ii) si ricava

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi i \frac{\sin 2\omega}{\pi^2 - \omega^2}.$$

Si noti che $\widehat{f}$ è funzione puramente immaginaria dispari, e questo era prevedibile essendo f funzione reale dispari. $\widehat{f}$ è rapporto di funzioni continue con il denominatore che si annulla in $x = \pm\pi$. Essendo però

$$\lim_{x \rightarrow \pm\pi} \widehat{f}(\omega) = 2\pi i \lim_{x \rightarrow \pm\pi} \frac{\sin 2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \stackrel{(H)}{=} -2\pi i \lim_{x \rightarrow \pm\pi} \frac{\cos 2\omega}{\omega} = \mp 2i,$$

risulta $\widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, risultato prevedibile essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, essendo anche

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{2\pi}{|\pi^2 - \omega^2|} \in L^1(\mathbb{R} \setminus]-4, 4[) \cap L^2(\mathbb{R} \setminus]-4, 4[),$$

si ha $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Il fatto che $\widehat{f}$ appartenga ad $L^2(\mathbb{R})$ era prevedibile grazie al teorema di Plancherel, perché $f \in L^2(\mathbb{R})$ essendo continua e a supporto compatto. Si osservi anche che grazie al fatto che $x \mapsto x^n f(x)$ è sommabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ (è continua e a supporto compatto), si ha $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

- (iv) Si noti che $\widehat{f}$ è trasformabile alla Fourier nel senso di L^1 e che la sua trasformata è reale dispari, essendo $\widehat{f}$ immaginaria dispari. Allora, usando l'espressione di $\widehat{f}$ e la formula di dualità ($f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\pi^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega}{2} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{i} F[\widehat{f}](-1/2) = -f(1/2) = -1.$$

Esercizio 2

Sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{1 + |x|^2} + e^{-|x|} \chi_{[-n, n]}(x).$$

Si studi la convergenza puntuale, uniforme, $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ di $\{f_n\}_{n \geq 1}$.

Svolgimento

Convergenza puntuale. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-|x|} \doteq f(x). \quad (1)$$

Infatti, banalmente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{1 + |x|^2} = 0.$$

Inoltre, fissato $x \in \mathbb{R}$ e preso $n > |x|$, si ha $e^{-|x|} \chi_{[-n, n]}(x) = e^{-|x|}$, da cui si deduce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-|x|} \chi_{[-n, n]}(x) = e^{-|x|},$$

e quindi (1).

Convergenza uniforme. Usando la disuguaglianza triangolare ed essendo $x \mapsto e^{-|x|}$ crescente in $] -\infty, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty[$ e $2|x| \leq 1 + |x|^2$, si ha

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{1 + |x|^2} + |e^{-|x|} \chi_{[-n, n]}(x) - e^{-|x|}| \leq \frac{1}{2n} + e^{-|x|} \chi_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}(x) \\ &\leq \frac{1}{2n} + e^{-n}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} + e^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e quindi $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f(x) = e^{-|x|}$.

Convergenza $L^1(\mathbb{R})$. Si osservi che $f_n \notin L^1(\mathbb{R})$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| |f_n(x)| = \frac{1}{n} \neq 0,$$

ed essendo $1/|x| \notin L^1(\mathbb{R} \setminus]-1, 1[)$, anche f_n non è sommabile in $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, e dunque non può esserlo in $\mathbb{R}$. Quindi $\{f_n\}_{n \geq 1}$ non converge in $L^1(\mathbb{R})$.

Convergenza $L^2(\mathbb{R})$. Si osservi che

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1 + |x|^2} + e^{-|x|} \doteq g(x).$$

g è funzione $L^2(\mathbb{R})$. Infatti è funzione continua, e dunque a quadrato sommabile in ogni intervallo limitato. Inoltre vale

$$|g(x)| \leq \frac{1}{|x|} + e^{-|x|},$$

e le funzioni $x \mapsto 1/|x|$ e $x \mapsto e^{-|x|}$ appartengono ad $L^2(\mathbb{R} \setminus]-1, 1[)$. Si deduce che g è una dominante $L^2(\mathbb{R})$ della successione $\{f_n\}_{n \geq 1}$. Poiché vale anche (1), grazie al Teorema di Lebesgue si conclude che $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge ad f in $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} e^{\frac{1}{(1-z)^2}}.$$

- (i) Se ne studino le singolarità e si calcolino i relativi residui;
- (ii) si scriva la parte principale dello sviluppo di Laurent di f convergente in un disco bucato centrato in $z = 2$;
- (iii) si discuta al variare di $r > 0$ l'esistenza dell'integrale

$$\int_{C_r} f(z) dz,$$

dove C_r è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine e lo si calcoli ove possibile.

Svolgimento

- (i) Le singolarità di f si trovano in $z = 2$ e $z = 1$. La prima è un polo del secondo ordine, essendo

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} e^{\frac{1}{(1-z)^2}} = e.$$

La seconda è una singolarità essenziale: infatti, se $z = 1 + iy$, si ha

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z=1+iy}} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{(iy - 1)^2} e^{-1/y^2} = 0,$$

mentre

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = +\infty,$$

e quindi f non ha limite per $z \rightarrow 1$. Veniamo ora al calcolo dei residui. Per la singolarità in $z = 2$ si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, 2) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} [(z - 2)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} e^{\frac{1}{(1-z)^2}} = \lim_{z \rightarrow 2} -\frac{2}{(z - 1)^3} e^{\frac{1}{(1-z)^2}} \\ &= -2e \end{aligned} \quad (2)$$

Per calcolare $\operatorname{res}(f, 1)$, dobbiamo scrivere lo sviluppo di Laurent di f in un intorno bucato di $z = 1$. Grazie al teorema di derivazione delle serie di potenze, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - 2)^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2 - z} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - (z - 1)} \right) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - 1)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(z - 1)^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (j + 1)(z - 1)^j. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$e^{\frac{1}{(1-z)^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{(z - 1)^{2p}}.$$

Se ne deduce che

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (j + 1)(z - 1)^j \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{(z - 1)^{2p}} \right) = \sum_{j,p=0}^{+\infty} \frac{j + 1}{p!} (z - 1)^{j-2p} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\substack{j,p \geq 0 \\ j-2p=n}} \frac{j + 1}{p!} \right) (z - 1)^n. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\operatorname{res}(f, 1)$ il coefficiente del termine di posto -1 nello sviluppo di Laurent appena trovato, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, 1) &= \sum_{\substack{j,p \geq 0 \\ j-2p=-1}} \frac{j + 1}{p!} = \sum_{\substack{j,p \geq 0 \\ j+1=2p}} \frac{j + 1}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2p}{p!} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p - 1)!} \\ &= 2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = 2e. \end{aligned} \quad (3)$$

(ii) Essendo $z = 2$ un polo del secondo ordine, la parte principale si scrive

$$\frac{c_{-1}}{z-2} + \frac{c_{-2}}{(z-2)^2}.$$

Dobbiamo calcolare i coefficienti c_{-1} e c_{-2} . Grazie a (2), si ha $c_{-1} = -2e$. Quanto a c_{-2} si ottiene

$$c_{-2} = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} e^{\frac{1}{(1-z)^2}} = e.$$

Quindi la parte principale cercata è

$$-\frac{2e}{z-2} + \frac{e}{(z-2)^2}.$$

(iii) Poiché $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$, l'integrale esiste per $r \neq 1, 2$: infatti C_1 e C_2 sono le uniche circonferenze di centro l'origine che contengono le singolarità di f . Grazie al Teorema dei residui e sfruttando (2)-(3), si ha

$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z) dz &= \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < r < 1, \\ 2\pi i \operatorname{res}(f, 1) & \text{se } 1 < r < 2, \\ 2\pi i [\operatorname{res}(f, 1) + \operatorname{res}(f, 2)] & \text{se } r > 2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < r < 1 \text{ o } r > 2, \\ 4\pi e i & \text{se } 1 < r < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 4

- (i) Sia $f(x) = e^{-2|x|} \frac{\sin 3x}{x}$; si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Siano $g(x) = \frac{2}{4+x^2}$ e $h(x) = \chi_{[-3,3]}(x)$; si calcoli mediante integrazione diretta il prodotto di convoluzione $g * h$ e se ne deduca il valore di $\widehat{f}$.
- (iii) Si calcoli il limite in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ della successione $kf(kx)$.
- (iv) (facoltativo) Si calcoli $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Svolgimento

(i) Si osservi che

$$|f(x)| = 3e^{-2|x|} \left| \frac{\sin 3x}{x} \right| \leq 3e^{-2|x|} \in L^1(\mathbb{R}),$$

e quindi anche f è sommabile su $\mathbb{R}$.

(ii) Siano $g(x) = \frac{2}{4+x^2}$ e $h(x) = \chi_{[-3,3]}(x)$; si calcoli Sfruttando la definizione di convoluzione, si ottiene

$$\begin{aligned} g * h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)g(x-y) dy = \int_{-3}^3 \frac{2}{4+(x-y)^2} dy = \int_{-3}^3 \frac{1/2}{1+[(y-x)/2]^2} dy \\ &= \arctan \frac{y-x}{2} \Big|_{-3}^3 = \arctan \frac{3-x}{2} + \arctan \frac{3+x}{2}, \end{aligned}$$

che è funzione sommabile su $\mathbb{R}$, essendo tali g e h . Si osservi che

$$e^{-2|x|} = \frac{1}{\pi} \widehat{g}(x), \quad \frac{\sin 3x}{x} = \frac{1}{2} \widehat{h}(x).$$

Sapendo che $\widehat{g} \cdot \widehat{h} = F[g * h]$ e usando la formula di dualità ($g * h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$), si ottiene

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F[\widehat{g} \cdot \widehat{h}](\omega) = \frac{1}{2\pi} F[F[g * h]](\omega) = g * h(-\omega) \\ &= \arctan \frac{3 + \omega}{2} + \arctan \frac{3 - \omega}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Si osservi che

$$F[kf(kx)](\omega) = \widehat{f}(\omega/k) = \arctan \frac{3k + \omega}{2k} + \arctan \frac{3k - \omega}{2k} \doteq \zeta_k(\omega).$$

Poiché

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta_k(\omega) = 2 \arctan \frac{3}{2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

e, fissata $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha

$$|\zeta_k(\omega)v(\omega)| \leq \pi|v(\omega)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

grazie al teorema di Lebesgue si ottiene

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \zeta - k, v \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \zeta_k(\omega)v(\omega) d\omega = 2 \arctan \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} v(\omega) d\omega = \langle 2 \arctan \frac{3}{2}, v \rangle.$$

Quindi $F[kf(kx)] \rightarrow 2 \arctan(3/2)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, e quindi $kf(kx) \rightarrow F^{-1}[2 \arctan(3/2)] = 2 \arctan(3/2)\delta_0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Altrimenti, si può procedere in questo modo. Essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, è noto che

$$kf(kx) \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \cdot \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

e quindi, poiché

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \widehat{f}(0) = 2 \arctan \frac{3}{2},$$

si ottiene

$$kf(kx) \rightarrow 2 \arctan \frac{3}{2} \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

(iv) Osservando che f è pari, si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \widehat{f}(0) = \arctan \frac{3}{2}.$$

Esercizio 5 (Facoltativo)

Sia $T = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2} \delta(x - k)$. Si dica se T definisce una distribuzione e se tale distribuzione è anche temperata.

Svolgimento

Sia $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Allora, fissato $N \in \mathbb{N}$ tale che $\text{supp } v \subseteq [-N, N]$, si ha

$$\langle T, v \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2} \delta(x-k), v \right\rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \langle x^{k^2} \delta(x-k), v \rangle = \sum_{k=0}^N k^{k^2} v(k),$$

che è una somma finita. Grazie al teorema di completezza, T definisce una distribuzione. Se invece $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^{k^2} v(k)$$

può non essere convergente. Infatti, se $v = e^{-x^2}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^{k^2} v(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{k^2} e^{-k^2} = +\infty$$

perché

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{k^2} e^{-k^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{e} \right)^{k^2} = +\infty.$$

Quindi T non definisce una distribuzione temperata.