Analisi Reale e Complessa - a.a. 2007/2008

Terzo appello - Tema 1

Esercizio 1

Si scriva una funzione f di variabile complessa olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, 4i, -4\}$ che abbia una singolarità essenziale in $z = 4i$, un polo del primo ordine in $z = 1$, un polo del secondo ordine in $z = -4$, e che soddisfi

$$\int_{C_5(0)} f(z)\ dz = 5\pi i\,, \tag{1}$$

dove $C_5(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 5 percorsa una volta in senso antiorario.
Si calcoli poi il seguente integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4}\ dz\,. \tag{2}$$

Svolgimento

Sia f definita da

$$f(z) = e^{1/(z-4i)^2} + \frac{c}{z-1} + \frac{1}{(z+4)^2}\,,$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è una opportuna costante non nulla che sceglieremo dopo. Le singolarità di f sono esattamente i punti $1, 4i, -4$. Poiché

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = c\,, \qquad \lim_{z\to -4}(z+4)^2 f(z) = 1\,,$$

i punti $z = 1$ e $z = -4$ sono rispettivamente un polo semplice ed un polo del secondo ordine, come richiesto. Resta da determinare la natura del punto $z = 4i$. Si osservi che le funzioni

$$z \mapsto \frac{c}{z-1}\,, \qquad z \mapsto \frac{1}{(z+4)^2}\,,$$

sono olomorfe in un intorno di $z = 4i$, e quindi il loro sviluppo di Laurent centrato in tale punto contiene solo potenze positive di $z - 4i$. Inoltre vale

$$e^{1/(z-4i)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(z-4i)^{2k}}\,, \tag{3}$$

cosicché $z \mapsto e^{1/(z-4i)^2}$ ha una singolarità essenziale in $z = 4i$, poiché il suo sviluppo di Laurent centrato in tale punto contiene una quantità infinita di potenze negative di $z - 4i$. Se ne deduce che ciò vale anche per f, e dunque f ha una singolarità essenziale in $z = 4i$, come si voleva. Adesso cerchiamo di scegliere c in modo da soddisfare (1). Dal teorema dei residui sappiamo che

$$\int_{C_5(0)} f(z)\ dz = 2\pi i\big[\mathrm{res}\,(f,1) + \mathrm{res}\,(f,4i) + \mathrm{res}\,(f,-4)\big]\,.$$

Si osservi che

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{res}(e^{1/(z-4i)^2},1)=0\,, &&\operatorname{res}(c/(z-1),1)=c\,, &&\operatorname{res}(1/(z+4)^2,1)=0\,,\\
&\operatorname{res}(e^{1/(z-4i)^2},4i)=0\,, &&\operatorname{res}(c/(z-1),4i)=0\,, &&\operatorname{res}(1/(z+4)^2,4i)=0\,,\\
&\operatorname{res}(e^{1/(z-4i)^2},-4)=0\,, &&\operatorname{res}(c/(z-1),-4)=0\,, &&\operatorname{res}(1/(z+4)^2,-4)=0\,.
\end{aligned}
$$

Infatti, la funzione $z \mapsto e^{1/(z-4i)^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{4i\}$ e il suo sviluppo di Laurent di centro $z=4i$ scritto in (3) contiene solo potenze pari di $z-4i$: quindi tale funzione ha residuo nullo in $4i$. La funzione $z\mapsto c/(z-1)$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ e il suo sviluppo di Laurent di di centro $z=1$ coincide con la funzione stessa, cosicché essa ha residuo c in tale punto. La funzione $z\mapsto 1/(z+4)^2$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{-4\}$ e il suo sviluppo di Laurent di di centro $z=-4$ coincide con la funzione stessa, cosicché essa ha residuo nullo in tale punto. Se ne deduce che

$$\int_{C_5(0)} f(z)\;dz = 2\pi i c\,.$$

Affinché valga (1) deve essere $c=5/2$, e quindi

$$f(z)=e^{1/(z-4i)^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z+4)^2}\,.$$

Per il calcolo di (2), si osservi che l'unica singolarità della funzione integranda all'interno di $C_3(0)$ è $z=1$, perché

$$\lim_{z\to 2}\frac{1-\cos(\pi z)}{(z-2)^2}\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos(\pi z)}{z^2}=\frac{\pi^2}{2}\,,$$

e quindi

$$\lim_{z\to 2}\frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4}=f(2)\cdot\frac{\pi^4}{4}\in\mathbb{C}\,.$$

Poiché

$$\operatorname{res}\left(\frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4},1\right)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4}=4\cdot\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=10\,,$$

usando il teorema dei residui si ottiene

$$\int_{C_3(0)}\frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4}\;dz=20\pi i$$

Esercizio 2

Si studino le convergenze puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$, L^1_{loc}, $L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ della successione di funzioni definita da

$$f_n(x)=\begin{cases} xe^{-n/|x|} & \text{se}\quad x\neq 0\,,\\ 0 & \text{se}\quad x=0\,.\end{cases}$$

Svolgimento

Convergenza puntuale. Banalmente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

grazie al fatto che $e^{-n/|x|} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Convergenza uniforme. Il limite uniforme deve coincidere con quello puntuale, e quindi il candidato è la funzione nulla. Poiché per ogni n naturale non nullo $e^{-n/|x|} \to 1$ per $x \to \pm\infty$, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \mp\infty \qquad \forall n \geq 1\,, \tag{4}$$

da cui $\|f_n\|_\infty = +\infty$ per ogni $n \geq 1$. Quindi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere uniformemente a zero.

Convergenza L^1_{loc}. Fissato un compatto $K \subset \mathbb{R}$, si osservi che

$$|f_n(x)| \leq |x| \in L^1(K) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

e quindi, per il teorema della convergenza dominata, si deduce che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^1(K)$ (e quindi in L^1_{loc}) alla funzione nulla.

Convergenza $L^1(\mathbb{R})$. Poiché vale (4), $f_n \notin L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 1$.

Convergenza $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Poiché la successione converge in L^1_{loc} alla funzione nulla, essa vi converge anche in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Convergenza $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ una funzione test. Si osservi che

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\varphi(x) = 0 && \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ &|f_n(x)\varphi(x)| \leq |x\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}) && \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Applicando il teorema della convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\, dx = 0\,,$$

e quindi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alla distribuzione nulla.

Esercizio 3

Provare che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ esiste un'unica $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y)\, dy = f(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Sia $g(x) = e^{-|x|}$, funzione di $L^1(\mathbb{R})$. Allora, grazie alla disuguaglianza di Young, se $u \in L^1(\mathbb{R})$, anche $g * u \in L^1(\mathbb{R})$ e l'equazione si può riscrivere

$$u + g * u = f\,.$$

Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri, si ottiene

$$\widehat{u}(\xi) + \widehat{g}(\xi) \cdot \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,.$$

Poiché $\widehat{g}(\xi) = 2/(1+\xi^2)$, si ha che $\widehat{u}$ soddisfa

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1+\xi^2}{3+\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \frac{2}{3+\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi)\,. \tag{5}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}\frac{2}{3+\xi^2} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1+(\xi/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \cdot \widehat{g}(\xi/\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \widehat{g}(\xi/\sqrt{3}) \\ &= \mathcal{F}\big[e^{-|\sqrt{3}x|}/\sqrt{3}\big](\xi)\,.\end{aligned}$$

Allora, posto $\varphi(x) = e^{-|\sqrt{3}x|}/\sqrt{3}$, da (5) si ottiene che vale

$$u(x) = f(x) - \varphi * f(x)\,,$$

che è funzione $L^1(\mathbb{R})$ essendo tali f e φ, e quindi anche $\varphi * f$ grazie alla disuguaglianza di Young. La soluzione trovata è evidentemente unica grazie all'iniettività della trasformata di Fourier.

Esercizio 4

Siano f_d e f_p rispettivamente le prolungate 2π-periodiche dispari e pari della funzione $f : [0,\pi[\to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$.

1. Si calcolino i coefficienti di Fourier di f_p
2. Si calcolino i coefficienti di Fourier di f_d.
3. Si studino la convergenza puntuale, uniforme e $L^2(-\pi,\pi)$ delle serie di Fourier di f_d e f_p.
4. Si ricavi la somma delle serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{4(-1)^j}{\pi^2(2j+1)^3}\right], \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

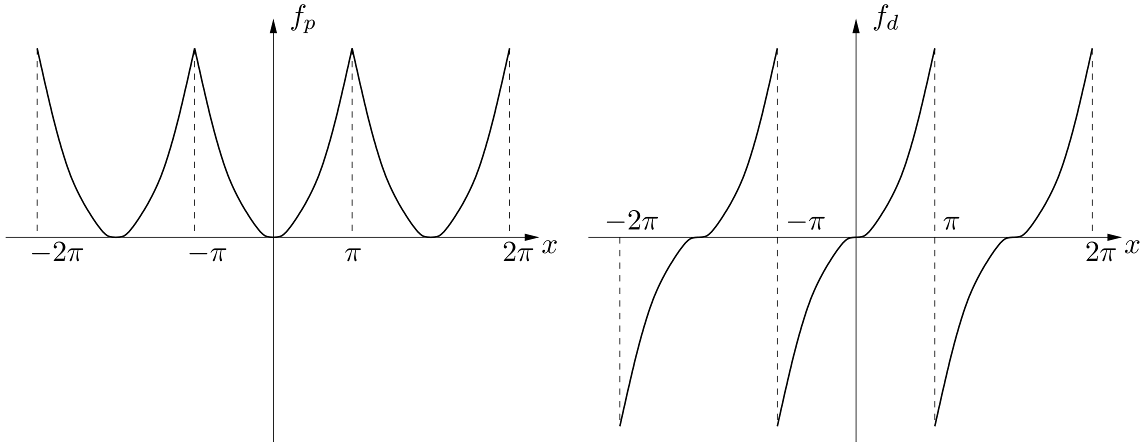

Figura 1: Le funzioni f_p e f_d

Svolgimento

Le funzioni f_p e f_d nell'intervallo $[-\pi, \pi[$ sono definite rispettivamente da

$$f_p(x) = x^2 \,, \qquad f_d(x) = x|x| \,.$$

e i loro grafici sono riprodotti in figura 1.

1. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f_p. Essendo f_p funzione pari la sua serie di Fourier è una serie di soli coseni. Si ha

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \; dx = \frac{\pi^2}{3} \,,$$

e, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) \; dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k} x^2 \sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x \sin(kx) \; dx \right] = \frac{4}{k\pi}\left[\frac{1}{k} x \cos(kx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kx) \; dx \right] \\ &= \frac{4}{k^2}(-1)^k \,. \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f_p è

$$s[f_p](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \,. \tag{6}$$

2. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f_d. Essendo dispari, la serie di Fourier di f_d è

una serie di soli seni. Per $k \geq 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x|\sin(kx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x^2\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\ dx\right] \\
&= \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\ dx\right] \\
&= \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{k^3\pi}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{k^3\pi}\big[(-1)^k - 1\big]\,.
\end{aligned}$$

La serie di Fourier di f_d è

$$s[f_d](x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{k^3\pi}\big[(-1)^k - 1\big]\right]\sin(kx)\,. \tag{7}$$

3. Essendo funzioni continue nell'intervallo $[-\pi,\pi[$, f_p e f_d appartengono a $L^2(-\pi,\pi)$ e quindi le loro serie di Fourier convergono in tale spazio. Inoltre, entrambe sono funzioni $C^1(]-\pi,\pi[)$ con derivata prima limitata, e quindi, grazie al criterio di Dini con le condizioni di Hölder, le loro serie di Fourier convergono puntualmente. In particolare, la serie di Fourier di f_p converge puntualmente a f_p perché $f_p \in C^0(\mathbb{R})$, mentre la serie di Fourier di f_d converge puntualmente a f_d per $x \neq \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, avendo qui f_d dei punti di salto. In tali punti, la serie di Fourier converge a

$$\frac{f_d\big((\pi+2k\pi)+\big) + f_d\big((\pi+2k\pi)-\big)}{2} = 0\,.$$

È evidente che la serie di Fourier di f_d non converge uniformemente, avendo f_d delle discontinuità di tipo salto, mentre la serie di Fourier di f_p converge uniformemente essendo f_p continua e C^1 a tratti.

4. Ricaviamo la somma della prima serie usando la serie di Fourier di f_d. Scegliendo $x = \pi/2$ in (7) e osservando che

$$\sin(k\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2j \text{ per qualche } j \in \mathbb{N}\,, \\ (-1)^j & \text{se } k = 2j+1 \text{ per qualche } j \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
s[f_d](\pi/2) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left[\frac{2\pi}{2j+1} - \frac{8}{(2j+1)^3\pi}\right](-1)^j \\
&= 2\pi\sum_{j=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{4(-1)^j}{\pi^2(2j+1)^3}\right].
\end{aligned}$$

Grazie alle proprietà di convergenza della serie di Fourier di f_d, si ha $s[f_d](\pi/2) = f_d(\pi/2) = \pi^2/4$, da cui si ricava

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^j}{2j+1} - \frac{4(-1)^j}{\pi^2(2j+1)^3}\right] = \frac{\pi}{8}\,.$$

Riguardo alla somma della seconda serie, poiché $s[f_p](0) = f_p(0) = 0$, da (6) si ricava

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$