Analisi Reale e Complessa - a.a. 2007/2008

Quarto appello

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

si provi che è sommabile e si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Svolgimento

Si osservi che essendo $|\sin y/y| \le 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|f(x)| \le \frac{1}{(x^2+1)^2} \le \frac{1}{x^2+1},$$

che è funzione sommabile su $\mathbb{R}$, e quindi tale risulta anche f. Per calcolare l'integrale si osservi che

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= \operatorname{Im}\left[\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-1)}}{(x-1)(x^2+1)^2}\ dx\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[e^{-i}\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+1)^2}\ dx\right].\end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con metodi di analisi complessa. Si osservi che la funzione

$$\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+1)^2}$$

ha un polo semplice in $z = 1$ e poli doppi per $z^2 + 1 = 0$, cioè per $z = \pm i$, essendo

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\varphi(z) = \frac{e^i}{4}, \qquad \lim_{z\to i}(z-i)^2\varphi(z) = -\frac{e^{-1}}{4(i-1)}, \qquad \lim_{z\to -i}(z+i)^2\varphi(z) = \frac{e}{4(i+1)}.$$

Inoltre

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)^2} = 0,$$

e dunque siamo nelle condizioni di poter applicare il lemma del cerchio piccolo in $z = 1$ e il lemma di Jordan nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$. Grazie al teorema dei residui si ottiene

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+1)^2}\ dx = \pi i \operatorname{res}(\varphi, 1) + 2\pi i \operatorname{res}(\varphi, i).$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}(\varphi, 1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\varphi(z) = \frac{e^i}{4}\,,\\
\operatorname{res}(\varphi, i) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\big[(z-i)^2\varphi(z)\big] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z-1)(z+i)^2}\\
&= \lim_{z\to i} e^{iz}\frac{i(z-1)(z+i)^2 - \big[(z+i)^2 + 2(z-1)(z+i)\big]}{(z-1)^2(z+i)^4}\\
&= e^{-1}\frac{-4i(i-1) - \big[-4 + 4i(i-1)\big]}{16(i-1)^2}\\
&= \frac{e^{-1}}{4}\cdot\frac{3+2i}{-2i} = \frac{e^{-1}}{8}\cdot(3i-2)\,,
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \pi i\frac{e^i}{4} + 2\pi i\frac{e^{-1}}{8}(3i-2)\,,
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \operatorname{Im}\left[e^{-i}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{4}i - 2\pi e^{-i}\frac{e^{-1}}{8}(3+2i)\right]\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^{-1}}{4}\operatorname{Im}\big[(\cos 1 - i\sin 1)(3+2i)\big]\\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^{-1}}{4}(2\cos 1 - 3\sin 1)\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Siano $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Si provi che la funzione $h_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$
h_g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt
$$

   è continua.

2. Si provi che il funzionale $T : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ definito da $Tg = h_g$ è lineare e continuo (in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ si consideri la norma del sup).

Svolgimento

1. Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, proviamo che data una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ convergente a $\bar{x}$, si ha che $\{h_g(x)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h_g(\bar{x})$, cioè

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n - t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}-t)g(t)\,dt\,. \tag{1}
$$

Poiché $f(x_n - t) \to f(\bar{x} - t)$ per ogni t, essendo f continua, per provare (1) è sufficiente trovare una dominante e poi applicare il teorema della convergenza dominata. Per farlo, è sufficiente osservare che

$$\big|f(x_n - t)g(t)\big| \leq \|f\|_\infty |g(t)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

essendo f funzione $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto.

2. Per provare che T è continuo è sufficiente dimostrare che è limitato:

$$\begin{aligned} |Tg(x)| = |h_g(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\ dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x-t)g(t)\big|\ dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\ dt = \|f\|_\infty \|g\|_1, \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$\|Tg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1,$$

come si voleva.

Esercizio 3

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = x\chi_{]-n,n[}(x)$

1. Si calcoli il limite di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Si calcoli il limite di $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
3. Detta $\widetilde{f_n}$ la prolungata $2n$-periodica di f_n, se ne calcoli la sua serie di Fourier.
4. Usando i punti 2 e 3, si provi che per $n \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{ik}(-1)^{k+1}\big(\delta_{\pi k/n} - \delta_{-\pi k/n}\big)$$

converge a $\pi i \delta_0'$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento

1. Proviamo che la funzione limite è $f(x) = x$. Fissata una funzione test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si osservi che

   (a) $f_n(x)\varphi(x) \to f(x)\varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, perché fissato $x \in \mathbb{R}$ è sufficiente prendere $n > |x|$ affinché $f_n(x) = f(x)$;

   (b) si ha $|f_n(x)\varphi(x)| \leq |x\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ essendo φ funzione a decrescenza rapida.

   Allora, grazie al teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\ dx = \langle f, \varphi\rangle$$

   come si voleva.

2. Poiché $f_n \to f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e solo se $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si ha che

$$\widehat{f_n} \to \mathcal{F}[x] = -\frac{1}{i}\mathcal{F}[-ix] = i\mathcal{F}'[1] = 2\pi i\delta_0' .$$

3. Essendo $\widetilde{f_n}$ dispari (tale è f_n), la sua serie di Fourier è di soli seni. I coefficienti sono dati da

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} x \sin\frac{k\pi}{n}x\, dx = \frac{2}{n}\int_0^n x\sin\frac{k\pi}{n}x\, dx \\ &= \frac{2}{n}\left[-\frac{n}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{n}x\Big|_0^n + \frac{n}{k\pi}\int_0^n \cos\frac{k\pi}{n}x\, dx\right] \\ &= \frac{2n}{k\pi}(-1)^{k+1} . \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di $\widetilde{f_n}$ si scrive

$$s[\widetilde{f_n}](x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2n}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{n}x .$$

4. Si osservi che $\widetilde{f_n}$ è funzione continua a tratti che soddisfa le condizioni di Hölder, perché nell'intervallo periodo $]-n,n[$ è derivabile con derivata limitata. Quindi la sua serie di Fourier converge puntualmente a $\widetilde{f_n}$ in tutti i punti in cui è continua, e quindi per ogni $x \neq n + 2jn$, $j \in \mathbb{Z}$. In particolare vale

$$s[\widetilde{f_n}](x) = \widetilde{f_n}(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R} ,$$

e quindi $\mathcal{F}\big[s[\widetilde{f_n}]\big] = \mathcal{F}[\widetilde{f_n}]$ in $\mathcal{S}'$. Poiché $\widetilde{f_n}(x) \to x$ e $|\widetilde{f_n}(x)| \leq |x|$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, procedendo come punto 2 si ottiene

$$\mathcal{F}\big[s[\widetilde{f_n}]\big] \to 2\pi i\delta_0' \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) . \tag{2}$$

Inoltre, essendo $\widetilde{f_n}$ funzione $2n$-periodica tale che $\widetilde{f_n} \in L^2(-n,n)$, la sua serie di Fourier converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e quindi

$$\mathcal{F}\big[s[\widetilde{f_n}]\big] = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2n}{k\pi}(-1)^{k+1}\mathcal{F}\big[\sin(k\pi x/n)\big] = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{ik}(-1)^{k+1}\big(\delta_{k\pi/n} - \delta_{-k\pi/n}\big) . \tag{3}$$

Confrontando (2) con (3), si ottiene il risultato cercato.

Esercizio 4

Si determini per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) \doteq \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha|t|}}{|t|^\alpha} & \text{se} \quad t \neq 0 , \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 , \end{cases}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Se $\alpha < 0$, allora

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = +\infty\,,$$

e quindi f non è sommabile su $\mathbb{R}$. Se $\alpha = 0$, si ha $f(t) = 1/|t|^\alpha$ per q.o. t, ed è noto che tale funzione non è sommabile su $\mathbb{R}$. Discutiamo allora solo il caso con $\alpha > 0$. Poiché f è pari, ci limiteremo a verificare per quali $\alpha > 0$ f appartiene a $L^1(0,+\infty) \cap L^2(0,+\infty)$. Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ed è quindi $f \in L^1(a,b) \cap L^2(a,b)$ per ogni $0 < a < b$. Non ci resta che verificare la sommabilità in un intorno di 0 e un intorno di $+\infty$.

1. Poiché

   $$\lim_{t \to 0} |f(t)||t|^\alpha = 1\,,$$

   ed inoltre

   $$\int_0^1 \frac{1}{|t|^\alpha}\,dt < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha < 1\,,$$
   $$\int_0^1 \frac{1}{|t|^{2\alpha}}\,dt < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha < \frac{1}{2}\,,$$

   si ha che $f \in L^1(0,1) \cap L^2(0,1)$ se e solo se $\alpha < 1/2$.

2. Poiché per $\alpha > 0$

   $$\lim_{t \to +\infty} |f(t)|e^{\alpha|t|} = 0\,,$$

   e $t \mapsto e^{-\alpha|t|}$ appartiene a $L^1(1,+\infty) \cap L^2(1,+\infty)$ per $\alpha > 0$, si ha che anche $f \in L^1(1,+\infty) \cap L^2(1,+\infty)$ per tali valori di α

Dalla precedente discussione si conclude che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $0 < \alpha < 1/2$.