

# Analisi Reale e Complessa - a.a. 2007/2008

## Quinto appello

### Esercizio 1

Siano date le funzioni  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - |x|) & \text{se } \pi/2 \leq |x| \leq \pi, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{se } |x| > \pi. \end{cases}$$

- a) Provare che la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .
- b) Detta  $\tilde{f}$  la prolungata  $2\pi$ -periodica di  $f$ , provare che  $\tilde{f}' \in L^2(-\pi, \pi)$ , calcolare i coefficienti di Fourier di  $\tilde{f}'$  e studiare la convergenza puntuale della relativa serie di Fourier.
- c) Dedurre da b) lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$ .
- d) Sia  $\tilde{f}_n$  la funzione definita da  $\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)\chi_{[-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]}(x)$ ,  $n \geq 1$ . Provare che  $\mathcal{F}[\tilde{f}_n] \rightarrow \mathcal{F}[\tilde{f}]$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
- e) Dedurre da a) e b) la trasformata di Fourier di  $\tilde{f}$  (nel senso di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ).
- f) Calcolare  $g''$  nel senso delle distribuzioni, calcolarne la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}'$  e dedurre la trasformata di Fourier di  $g$ .

### Svolgimento

- a) La prolungata  $2\pi$ -periodica di  $f$  è continua, essendo  $f \in \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$  e

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = 0,$$

cosicché la prolungata  $2\pi$ -periodica di  $f$  è funzione continua su  $\mathbb{R}$ . Inoltre  $f$  è  $\mathcal{C}^1$  a tratti con derivata limitata, essendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2/\pi & \text{se } -\pi < x < -\pi/2, \\ 0 & \text{se } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ -2/\pi & \text{se } \pi/2 < x < \pi. \end{cases} \quad (1)$$

Quindi  $f$  soddisfa le condizioni del criterio di convergenza uniforme per le serie di Fourier.

- b) È chiaro che  $\tilde{f}'$  è la prolungata  $2\pi$ -periodica di  $f'$  in (1), da cui si deduce che  $\tilde{f}'$  è misurabile e limitata e quindi, in particolare, appartiene a  $L^2(-\pi, \pi)$ . Inoltre,  $\tilde{f}'$  è

costante a tratti e quindi soddisfa banalmente il criterio di Dini con le condizioni di Hölder: ne consegue che la sua serie di Fourier converge puntualmente e che vale

$$s[\tilde{f}'](x) = \begin{cases} 2/\pi & \text{se } -\pi + 2k\pi < x < -\pi/2 + 2k\pi, \\ 0 & \text{se } -\pi/2 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi \text{ o } x = \pi + 2k\pi, \\ -2/\pi & \text{se } \pi/2 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \\ 1/\pi & \text{se } x = -\pi/2 + 2k\pi, \\ -1/\pi & \text{se } x = \pi/2 + 2k\pi, \end{cases}$$

dove  $k$  è un numero intero. Quanto alla serie di Fourier di  $\tilde{f}'$ , osservato che questa è dispari e che si ottiene una serie di soli seni, si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}'(x) \sin(kx) dx = -\frac{4}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{4}{k\pi^2} \cos(kx) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{k\pi^2} \left[ (-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Poiché

$$\cos \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ (-1)^{k/2} & \text{se } k \text{ è pari,} \end{cases}$$

si ottiene

$$b_k = \begin{cases} -\frac{4}{(2j+1)\pi^2} & \text{se } k = 2j+1 \text{ per qualche } j \geq 0, \\ 2\frac{1-(-1)^j}{j\pi^2} & \text{se } k = 2j \text{ per qualche } j \geq 1. \end{cases}$$

- c) La serie di Fourier di  $f$  è una serie di soli coseni, essendo  $f$  pari. I coefficienti di Fourier  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sono dati da

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{3}{2}, \\ a_k &= -\frac{b_k}{k} = \begin{cases} \frac{4}{(2j+1)^2\pi^2} & \text{se } k = 2j+1 \text{ per qualche } j \geq 0, \\ \frac{(-1)^j - 1}{j^2\pi^2} & \text{se } k = 2j \text{ per qualche } j \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Se ne deduce che lo sviluppo di Fourier di  $f$  si scrive

$$s[f](x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos[(2j+1)x] + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j - 1}{j^2} \cos(2jx), \quad (2)$$

dove si sono potuti raggruppare i termini con  $k$  pari e quelli con  $k$  dispari essendo la serie di Fourier di  $f$  totalmente e quindi assolutamente convergente.

- d) Poiché  $\mathcal{F}[\tilde{f}_n] \rightarrow \mathcal{F}[\tilde{f}]$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  se e solo se  $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , proviamo quest'ultima affermazione, evitando così di calcolare le trasformate di Fourier di  $\tilde{f}_n$  e di  $\tilde{f}$ . Poiché

$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)$  quando  $n > (|x| - \pi)/2\pi$ ,  $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\tilde{f}$  puntualmente. Inoltre, fissata  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si ha

$$|\tilde{f}_n(x)\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Applicando allora il teorema di Lebesgue, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \tilde{f}_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\varphi(x) dx = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle,$$

come si voleva.

- e) Poiché la serie di Fourier di  $\tilde{f}$  converge uniformemente a  $\tilde{f}$ , essa vi converge anche in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Allora, usando (2), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{f}] &= \mathcal{F}[s[\tilde{f}]] \\ &= \mathcal{F}[3/4] + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \mathcal{F}[\cos[(2j+1)x]] + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j - 1}{j^2} \mathcal{F}[\cos(2jx)] \\ &= \frac{3}{2}\pi\delta_0 + \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} (\delta_{2j+1} + \delta_{-(2j+1)}) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j - 1}{j^2} (\delta_{2j} + \delta_{-2j}). \end{aligned}$$

- f) Si ottiene

$$g'(x) = \begin{cases} 2/\pi & \text{se } -\pi < x < -\pi/2, \\ 0 & \text{se } |x| < \pi/2 \text{ o } |x| > \pi, \\ -2/\pi & \text{se } \pi/2 < x < \pi, \end{cases} \quad g''(x) = \frac{2}{\pi} (\delta_{-\pi} - \delta_{-\pi/2} - \delta_{\pi/2} + \delta_{\pi}).$$

Si ottiene

$$\mathcal{F}[g''] = \frac{2}{\pi} (e^{-\pi i \omega} - e^{-\pi i \omega/2} - e^{\pi i \omega/2} + e^{\pi i \omega}) = \frac{4}{\pi} [\cos(\pi \omega) - 2\cos(\pi \omega/2)]. \quad (3)$$

Essendo  $\mathcal{F}[g''](\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}[g](\omega)$ , si deduce che

$$\mathcal{F}[g](\omega) = -4 \frac{\cos(\pi \omega) - \cos(\pi \omega/2)}{\pi \omega^2}. \quad (4)$$

*Nota bene:* l'operazione appena compiuta di dividere  $\mathcal{F}[g''](\omega)$  per  $\omega^2$  può essere ambigua in ambito distribuzionale, perché equivale a moltiplicare una distribuzione per la funzione  $\omega \mapsto 1/\omega^2$ , che non ha sufficiente regolarità. Nel nostro caso l'ambiguità non sussiste perché, essendo  $g$  funzione di  $L^1$ , sappiamo a priori che  $\mathcal{F}[g]$  è funzione continua, e tale è il risultato che otteniamo perché  $\mathcal{F}[g'']$  è funzione analitica con uno zero di molteplicità 2 in  $\omega = 0$ . A titolo di esempio, cerchiamo di definire la divisione di  $\delta_0$  per  $\omega^2$ . Questo significa trovare una distribuzione  $f$  tale che  $\omega^2 f = \delta_0$ , cioè per cui vale

$$\langle \omega^2 f, \varphi \rangle = \langle f, \omega^2 \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (5)$$

In tal caso la soluzione non è unica. Infatti, posto  $f_1 = \delta_0''/2$  e  $f_2 = \delta_0''/2 + \delta_0$  si ottiene

$$\begin{aligned} \langle f_1, \omega^2 \varphi \rangle &= \langle \delta_0''/2, D^2(\omega^2 \varphi) \rangle = \langle \delta_0''/2, 2\varphi + 2\omega\varphi' + \omega^2\varphi'' \rangle = \varphi(0), \\ \langle f_2, \omega^2 \varphi \rangle &= \langle f_1, \omega^2 \varphi \rangle + \langle \delta_0, \omega^2 \varphi \rangle = \varphi(0), \end{aligned}$$

e quindi  $f_1$  e  $f_2$  sono entrambe soluzioni di (5). Anzi, tutte le distribuzioni del tipo  $\delta_0''/2 + \alpha\delta_0' + \beta\delta_0$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sono soluzioni di (5), che risulta così avere infinite soluzioni: da qui l'ambiguità della scrittura  $\delta_0/\omega^2$ . Tornando all'espressione di  $\mathcal{F}[g'']$  in (3), il risultato della divisione per  $\omega^2$  nel senso delle distribuzioni è

$$-4 \frac{\cos(\pi\omega) - \cos(\pi\omega/2)}{\pi\omega^2} + \alpha\delta_0' + \beta\delta_0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Poiché a noi interessa la parte rappresentata da una funzione continua, perché tale deve essere  $\mathcal{F}[g]$ , ne deduciamo che dobbiamo scegliere  $\alpha = \beta = 0$  ottenendo così (4).

## Esercizio 2

Sia  $T : \mathcal{C}^0([-1, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$  il funzionale definito da  $Tf(x) = f(2x^2 - 1)$ .

- Si provi che  $T$  è lineare e continuo se in  $\mathcal{C}^0([-1, 1])$  e in  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  si considera la norma del sup.
- $T$  rimane lineare e continuo se si dota  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  della norma  $\|\cdot\|_1$ ?

## Svolgimento

La linearità di  $T$  è banalmente verificata in entrambi i casi perché

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(2x^2 - 1) = \alpha f(2x^2 - 1) + \beta g(2x^2 - 1) \\ &= \alpha Tf(x) + \beta Tg(x) = (\alpha Tf + \beta Tg)(x) \end{aligned}$$

per ogni coppia di scalari  $\alpha, \beta$ . Occupiamoci ora della continuità di  $T$ .

- Poiché

$$|Tf(x)| = |f(2x^2 - 1)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall x \in [-1, 1],$$

si ha  $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , da cui la limitatezza e quindi la continuità di  $T$ .

- Essendo  $\mathcal{C}^0([0, 1]) \subset L^1(0, 1)$  con  $\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , si ottiene

$$\|Tf\|_1 \leq \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

grazie a quanto dimostrato nel punto a). Dunque  $T$  rimane continuo anche se si dota  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  della norma  $\|\cdot\|_1$ .

## Esercizio 3

Sia  $m \in \mathbb{Z}$  e si ponga

$$f_m(z) = \frac{e^z - 1}{(z - 2\pi i)^m}, \quad g(z) = \frac{\sinh z}{\sin z}.$$

- Si classifichino le singolarità di  $f_m$  e si calcoli

$$\int_{C_{3\pi}(0)} f_m(z) dz$$

al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ , dove  $C_{3\pi}(0)$  indica la circonferenza centrata nell'origine e raggio  $3\pi$  percorsa una volta in senso antiorario.

- b) Si classifichino le singolarità di  $g$ .
- c) Si classifichino le singolarità di  $h(z) = f_m(z) \cdot g(z)$  al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ .

### Svolgimento

- a) L'unica singolarità di  $f_m$  è il punto  $z = 2\pi i$ . Essendo uno zero di molteplicità 1 per il numeratore perché

$$(e^z - 1) \Big|_{z=2\pi i} = 0, \quad \frac{d}{dz}(e^z - 1) \Big|_{z=2\pi i} = e^z \Big|_{z=2\pi i} = 1 \neq 0,$$

si ottiene che per  $m \leq 1$  la singolarità è eliminabile, mentre per  $m \geq 2$  è un polo di ordine  $m - 1$ . Infatti vale

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi i} (z - 2\pi i)^{m-1} f_m(z) = \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{e^z - 1}{z - 2\pi i} = 1.$$

Essendo  $z = 2\pi i$  l'unica singolarità contenuta all'interno di  $C_{3\pi}(0)$ , grazie al teorema dei residui e alla precedente discussione sulla natura della singolarità si ottiene che

$$\int_{C_{3\pi}(0)} f_m(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{se } m \leq 1, \\ 2\pi i \operatorname{res}(f_m, 2\pi i) & \text{se } m \geq 2. \end{cases}$$

Non ci resta che calcolare  $\operatorname{res}(f_m, 2\pi i)$  per  $m \geq 2$ . Poiché la funzione esponenziale è periodica di periodo  $2\pi i$ , si ha

$$e^z - 1 = e^{z-2\pi i} - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(z - 2\pi i)^k}{k!},$$

da cui si ottiene

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(z - 2\pi i)^{k-m}}{k!} = \sum_{j=1-m}^{+\infty} \frac{(z - 2\pi i)^j}{(j+m)!}.$$

Prendendo il coefficiente di  $(z - 2\pi i)^{-1}$ , si ottiene  $\operatorname{res}(f_m, 2\pi i) = 1/(m-1)!$ , da cui

$$\int_{C_{3\pi}(0)} f_m(z) dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!}, \quad m \geq 2.$$

- b) Le singolarità di  $g$  sono gli zeri della funzione seno, e quindi i punti  $z_k = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Questi sono tutti zeri semplici del denominatore, e tra essi l'unico zero del numeratore è  $z_0 = 0$ , anch'esso semplice. Se ne deduce che  $z_0$  è una singolarità eliminabile, mentre  $z_k$ , con  $k \neq 0$ , è un polo semplice.
- c) Le singolarità di  $h(z) = f_m(z) \cdot g(z)$  sono le stesse di  $f_m$  e  $g$ . Cominciamo con  $z = 2\pi i$ . Questa singolarità è uno zero di molteplicità 2 per il numeratore di  $h$ , essendo zero semplice per  $z \mapsto e^z - 1$  e per  $\sinh$ . Se ne deduce che
- i) se  $m \leq 2$ , è una singolarità eliminabile per  $h$ ;

ii) se  $m \geq 3$  è un polo di ordine  $m - 2$ ; infatti

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 2\pi i} (z - 2\pi i)^{m-2} h(z) &= \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{e^z - 1}{(z - 2\pi i)} \cdot \frac{\sinh z}{(z - 2\pi i)} \cdot \frac{1}{\sin z} \\ &= \frac{1}{\sin(2\pi i)} = \frac{1}{i \sinh(2\pi)} \neq 0.\end{aligned}$$

La singolarità in  $z_0 = 0$  è eliminabile per  $g$  e non è singolarità per  $f_m$ , dunque è singolarità eliminabile per  $h$ . Le singolarità in  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  non nullo, sono poli semplici per  $g$  e non sono zeri di  $f_m$ : se ne deduce che sono poli semplici anche per  $h$ , infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) h(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} f_m(z) \cdot (z - z_k) \cdot g(z) = f_m(z_k) \cdot (-1)^k \cdot \sinh(z_k) \neq 0,$$

essendo  $\cos z_k = \cos(k\pi) = (-1)^k$ .