

# ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 28.01.2009

## Esercizio 1 [8 punti]

Per ogni  $u \in L^1(0, 1)$  si definisca la funzione  $Tu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$Tu(x) = \int_0^x (x+t)^2 u(t) dt.$$

1. Si provi che  $Tu \in C^0([0, 1])$ .
2. Si provi che il funzionale  $T : L^1(0, 1) \rightarrow C^0([0, 1])$  è continuo (in  $C^0([0, 1])$  si consideri la norma del sup).

## Esercizio 2 [8 punti]

Siano  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$ , e

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1} + \frac{cz}{\sin(\pi z)}.$$

1. Si classifichino le singolarità di  $f$  al variare di  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$ .
2. Si determini  $c$  in modo che

$$\int_{C_1(1/2)} f(z) dz = 0,$$

dove  $C_1(1/2)$  è la circonferenza di centro  $1/2$  e raggio  $1$  percorsa una volta in senso antiorario.

## Esercizio 3 [8 punti]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione 4-periodica tale che

$$f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x) \quad \text{se} \quad -2 < x \leq 2.$$

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di  $f$ .
2. Studiare le convergenze puntuale, uniforme e  $L^2(-2, 2)$  della serie di Fourier di  $f$ .
3. Ricavare dalla serie di Fourier di  $f$  la quantità

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}.$$

4. **(Facoltativo)** Calcolare la trasformata di Fourier di  $f$  nel senso delle distribuzioni.

## Esercizio 4 [8 punti]

Siano

$$f(x) \doteq \frac{\sin x}{1+x^2}, \quad g(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}, \quad g_n(x) \doteq ng(nx), \quad f_n(x) = f * g_n(x),$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $*$  indica il prodotto di convoluzione.

1. Si provi che  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ .
2. Si provi che  $\widehat{f_n}$  è continua e  $C^1$  a tratti, con  $\widehat{f_n}' \in L^2(\mathbb{R})$ .
3. Si provi che  $xf_n(x) \rightarrow \pi x f(x)$  in  $L^2(\mathbb{R})$ .

---

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

**Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.**

**La parte facoltativa deve essere svolta dopo aver completato tutti gli altri esercizi.**