

ANALISI REALE E COMPLESSA
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 16.02.2009

Esercizio 1 [10 punti]

Siano $\{f_n\}_{n \geq 1}$ e f definite da

$$f_n(x) = n \frac{\sin x}{x[n(x^2 + 4) + e^{|x|}]}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2 + 4)}, \quad x \neq 0.$$

1. Provare che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.
2. Provare che $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ a f e dedurre il valore del limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$.

Esercizio 2 [6 punti]

Sapendo che

$$t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) \quad \text{per } 0 < t < \pi,$$

si chiede di

1. studiare la convergenza puntuale, uniforme e $L^2(0, 2\pi)$ della serie $(a_0/2) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$ e determinarne la somma per ogni $t \in \mathbb{R}$;
2. calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$.

Esercizio 3 [8 punti]

Siano $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Si provi che se $\alpha > \beta - 1$, la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin |xy|^\alpha}{(x^2 + y^2)^\beta}$$

è sommabile in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 4 [8 punti]

Siano $f, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x^2 \chi_{[-1,1]}(x), \quad f_n(x) = n^2 f(x/n) \quad n \geq 1.$$

1. Si calcoli \widehat{f} e se ne deduca il valore dell'integrale

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 \sin \omega + 2\omega \cos \omega - 2 \sin \omega}{\omega^3} \cos(\omega/2) d\omega,$$

dopo aver verificato che la funzione integranda appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che $f_n \rightarrow x^2$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $n \rightarrow +\infty$.
3. Si provi che $\widehat{f_n} \rightarrow -2\pi\delta_0'$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tranne che in un numero finito di singolarità z_1, \dots, z_n . Dimostrare che se $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, allora $\sum_{i=1}^n \text{res}(f, z_i) = 0$.

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

La parte facoltativa deve essere svolta dopo aver completato tutti gli altri esercizi.