

ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 15.06.2009

Esercizio 1 [7 punti]

Sia

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x^2 - i}.$$

- (a) Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- (b) Si calcoli con metodi di variabile complessa la trasformata di Fourier di f .

Esercizio 2 [7 punti]

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\chi_{[n, +\infty[}(x)}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme in \mathbb{R} , la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$ e la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 [9 punti]

Sia f la prolungata 4-periodica dispari di

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Si discuta la convergenza della serie di Fourier di f in $L^2(-2, 2)$ e puntuale ed uniforme in \mathbb{R} ; si dica in particolare a quale valore tale serie converge per $x = -1$;
- (b) si calcolino i coefficienti di Fourier di f ;
- (c) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Esercizio 4 [9 punti]

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$, continua, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga

$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = x e^{-|x|}.$$

- (a) Si determini la trasformata di Fourier \hat{u} di u .
- (b) Sia $\alpha > 0$. Si calcoli mediante integrazione diretta la trasformata di Fourier di $\text{sign}(x)e^{-\alpha|x|}$.
- (c) Si calcoli esplicitamente u .

Tempo a disposizione: due ore e 45 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.