Analisi Reale e Complessa - a.a. 2008/2009

Primo appello

Esercizio 1

Per ogni $u \in L^1(0,1)$ si definisca la funzione $Tu : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$Tu(x) = \int_0^x (x+t)^2 u(t)\, dt\,.$$

1. Si provi che $Tu \in \mathcal{C}^0([0,1])$.
2. Si provi che il funzionale $T : L^1(0,1) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ è continuo (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup).

Svolgimento

1. Si osservi che

$$Tu(x) = \int_0^x (x^2 + 2tx + t^2) u(t)\ dt = x^2 \int_0^x u(t)\ dt + 2x \int_0^x tu(t)\ dt + \int_0^x t^2 u(t)\ dt\,.$$

Le funzioni $t \mapsto tu(t)$ e $t \mapsto t^2 u(t)$ sono sommabili in $[0,1]$ perché u è sommabile e valgono

$$|tu(t)| \leq |u(t)|\,, \qquad |t^2 u(t)| \leq |u(t)|\,.$$

Allora le funzioni definite su $[0,1]$

$$x \mapsto \int_0^x u(t)\ dt\,, \qquad x \mapsto \int_0^x tu(t)\ dt\,, \qquad x \mapsto \int_0^x t^2 u(t)\ dt$$

sono continue essendo funzioni integrali di funzioni sommabili, e quindi anche Tu è continua essendo somma di funzioni continue ($x \mapsto x^2$ e $x \mapsto 2x$ lo sono banalmente).

2. Proviamo che T è limitato, cioè che esiste $C > 0$ tale che

$$\|Tu\|_\infty \leq C\|u\|_1\,. \tag{1}$$

Si osservi che per ogni $x \in [0,1]$ vale

$$|Tu(x)| \leq \int_0^x (x+t)^2 |u(t)|\ dt \overset{0\leq x\leq 1}{\leq} \int_0^1 (1+t)^2 |u(t)|\ dt \overset{0\leq t\leq 1}{\leq} 4\|u\|_1\,,$$

da cui si ottiene

$$\|Tu\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |Tu(x)| \leq 4\|u\|_{L(0,1)}\,,$$

e quindi (1) è vera con $C = 4$.

Esercizio 2

Siano $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, e

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1} + \frac{cz}{\sin(\pi z)}\,.$$

1. Si classifichino le singolarità di f al variare di $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.

2. Si determini c in modo che

$$\int_{C_1(1/2)} f(z)\,dz = 0\,,$$

dove $C_1(1/2)$ è la circonferenza di centro $1/2$ e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento

1. Le singolarità di f si trovano in $w_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Per studiare meglio tali singolarità, poniamo $\varphi(z) = e^{1/z}/(z-1)$ e $\psi(z) = cz/\sin(\pi z)$, cosicché $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$.

Singolarità in $w_0 = 0$. Si osservi che $w_0 = 0$ è singolarità essenziale per $z \mapsto e^{1/z}$, perché lo sviluppo di Laurent di tale funzione centrato in w_0 contiene una quantità infinita di potenze negative di z essendo

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}\,. \tag{2}$$

Poiché w_0 non è singolarità per $z \mapsto 1/(z-1)$, ne consegue che φ ha una singolarità essenziale in tale punto. Inoltre, si ha

$$\lim_{z\to 0} \psi(z) = \frac{c}{\pi}\,,$$

e quindi w_0 è singolarità eliminabile per ψ. Se ne deduce che w_0 è singolarità essenziale per f.

Singolarità in $w_1 = 1$. Si osservi che

$$\lim_{z\to 1} (z-1)\varphi(z) = e\,, \qquad \lim_{z\to 1} (z-1)\psi(z) = -\frac{c}{\pi}\,, \tag{3}$$

da cui si deduce

$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = e - \frac{c}{\pi}\,. \tag{4}$$

Poiché $e - c/\pi = 0$ se e solo se $c = e\pi$, si deduce che f ha in $w_1 = 1$ un polo del primo ordine se $c \neq e\pi$. Per studiare il caso $c = e\pi$, osserviamo che, grazie a (3), le funzioni φ e ψ hanno entrambe un polo del primo ordine in w_1. Allora f ha in tale punto o un polo del primo ordine o una singolarità eliminabile. Poiché nel caso $c = e\pi$ il limite in (4) è nullo, si deduce che f non può avere un polo e quindi ha una singolarità eliminabile.

Singolarità in $w_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, 1$. In tal caso, φ non presenta singolarità in w_k, mentre ψ ha un polo del primo ordine essendo rapporto di due funzioni, con il numeratore, cz, che non si annulla in $z = w_k$, e il denominatore $\sin(\pi z)$ che ha uno zero di molteplicità 1 in w_k essendo

$$\sin(k\pi) = 0\,, \qquad D\sin(\pi z)\Big|_{z=k} = \pi\cos(\pi k) = \pi(-1)^k \neq 0\,.$$

Allora f ha in w_k un polo del primo ordine.

2. Grazie al teorema dei residui si ha

$$\int_{C_1(1/2)} f(z)\,dz = 2\pi i\big[\operatorname{res}(f,0) + \operatorname{res}(f,1)\big]\,. \tag{5}$$

Calcoliamo i residui coinvolti. Poiché, dato $z_0 \in \mathbb{C}$, vale

$$\operatorname{res}(f,z_0) = \operatorname{res}(\varphi,z_0) + \operatorname{res}(\psi,z_0)\,, \tag{6}$$

grazie a quanto osservato al punto 1. e a (3) si ha

$$\operatorname{res}(\varphi,1) = e\,, \qquad \operatorname{res}(\psi,1) = -\frac{c}{\pi}\,. \tag{7}$$

Riguardo al residuo in $w_0 = 0$, si ha $\operatorname{res}(\psi,0) = 0$ perché ψ ha in w_0 una singolarità eliminabile. Per calcolare il residuo di φ, avendo questa una singolarità essenziale in w_0, dobbiamo calcolarne lo sviluppo di Laurent. Poiché valgono (2) e

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{j=0}^{+\infty} z^j\,,$$

si ha

$$\varphi(z) = -\sum_{j,k\geq 0} \frac{1}{k!} z^{j-k} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigg(\sum_{\substack{j-k=n\\ j,k\geq 0}} \frac{1}{k!}\Bigg) z^n$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{res}(\varphi,0) = -\sum_{\substack{j-k=-1\\ j,k\geq 0}} \frac{1}{k!} = -\sum_{\substack{j=k-1\geq 0\\ k\geq 0}} \frac{1}{k!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 - e = \operatorname{res}(f,0)\,. \tag{8}$$

Da (5)-(8) si deduce che

$$\int_{C_{3/2}(0)} f(z)\,dz = 2\pi i(1 - c/\pi)\,,$$

e dunque affinché l'integrale sia nullo deve essere $c = \pi$.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione 4-periodica tale che

$$f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x) \quad \text{se} \quad -2 < x \leq 2\,.$$

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
2. Studiare le convergenze puntuale, uniforme e $L^2(-2,2)$ della serie di Fourier di f.
3. Ricavare dalla serie di Fourier di f la quantità

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j^2}\,.$$

4. **(Facoltativo)** Calcolare la trasformata di Fourier di f nel senso delle distribuzioni.

Svolgimento

1. Poiché f è pari, la sua serie di Fourier è di soli coseni. I suoi coefficienti di Fourier $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono, per $k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \frac{1}{2}\,,$$

e per $k \geq 1$, sfruttando la simmetria di f,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(k\pi x/2)\ dx = \int_0^1 (1-x)\cos(k\pi x/2)\ dx \\
&= \int_0^1 \cos(k\pi x/2)\ dx - \int_0^1 x\cos(k\pi x/2)\ dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi x/2)\Big|_0^1 - \frac{2}{k\pi}x\sin(k\pi x/2)\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x/2)\ dx \\
&= -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x/2)\Big|_0^1 = \frac{4}{k^2\pi^2}\big[1 - \cos(k\pi/2)\big]\,.
\end{aligned}$$

La serie di Fourier di f si scrive

$$s[f](x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\big[1-\cos(k\pi/2)\big]\cos(k\pi x/2)\,. \tag{9}$$

2. Banalmente, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ed è $\mathcal{C}^1$ a tratti, perché derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{4k, 4k\pm 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, con derivata limitata. Allora la sua serie di Fourier converge ad f in $L^2(-2,2)$ (perché $f \in L^2(-2,2)$) ed uniformemente (e quindi puntualmente) in $\mathbb{R}$.

3. Si osservi che

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ (-1)^j & \text{se } k = 2j \text{ è pari.} \end{cases} \tag{10}$$

Dai risultati di convergenza della serie di Fourier di f si ha $s[f](0) = f(0) = 1$, e quindi da (9) usando (10) si ottiene

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\cos(k\pi/2) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{4j^2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j^2}\,,
\end{aligned}
$$

da cui si ricava

$$
\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j^2} = \frac{3}{4}\,.
$$

4. Essendo f una funzione 4-periodica con $f \in L^2(-2,2)$, la sua trasformata di Fourier è un treno di impulsi. In particolare si ottiene

$$
\begin{aligned}
\widehat{f} &= \frac{1}{4}F[1] + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\big[1-\cos(k\pi/2)\big]F\big[\cos(k\pi x/2)\big] \\
&= \frac{\pi}{2}\delta_0 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\big[1-\cos(k\pi/2)\big]\big[\delta_{k\pi/2} + \delta_{-k\pi/2}\big]\,,
\end{aligned}
$$

dove la serie converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 4

Siano

$$
f(x) \doteq \frac{\sin x}{1+x^2}\,, \quad g(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}\,, \quad g_n(x) \doteq n g(nx)\,, \quad f_n(x) = f * g_n(x)\,,
$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e $*$ indica il prodotto di convoluzione.

1. Si provi che $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Si provi che $\widehat{f_n}$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti, con $\widehat{f_n}\,' \in L^2(\mathbb{R})$.
3. Si provi che $x f_n(x) \to \pi x f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

1. Poiché

$$
|f(x)| \le \frac{1}{1+x^2} = g(x) \in L^1(\mathbb{R})\,,
$$

f è sommabile su $\mathbb{R}$. Inoltre, anche $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ perché

$$
\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\; dx \overset{y=nx}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x)\; dx = \pi\,.
$$

Essendo f_n il risultato della convoluzione di due funzioni sommabili è anch'essa sommabile grazie alla disuguaglianza di Young.

2. Si osservi che essendo f_n la convoluzione di due funzioni sommabile, essa è sommabile. Allora vale
$$\widehat{f_n}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g_n}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega/n) \,. \tag{11}$$
Calcoliamo le trasformate di Fourier di g ed f.
$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\ \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2i}\big[\widehat{g}(\omega-1) - \widehat{g}(\omega+1)\big] = \frac{\pi}{2i}\big[e^{-|\omega-1|} - e^{-|\omega+1|}\big] \,. \end{aligned} \tag{12}$$
Da (11)-(12) si ottiene
$$\widehat{f_n}(\omega) = \frac{\pi^2}{2i} e^{-|\omega/n|}\big[e^{-|\omega-1|} - e^{-|\omega+1|}\big] \,.$$
Si osservi che

   (a) la funzione $\omega \mapsto e^{-|\omega/n|}$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti essendo derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con derivata che vale $De^{-|\omega/n|} = -(\operatorname{sgn}\omega)e^{-|\omega/n|}/n$;
   (b) la funzione $\omega \mapsto e^{-|\omega-1|}$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti essendo derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con derivata che vale $De^{-|\omega-1|} = -(\operatorname{sgn}(\omega-1))e^{-|\omega-1|}$;
   (c) la funzione $\omega \mapsto e^{-|\omega+1|}$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti essendo derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ con derivata che vale $De^{-|\omega+1|} = -(\operatorname{sgn}(\omega+1))e^{-|\omega+1|}$.

Allora, essendo $\widehat{f_n}$ espressa da somme e prodotti di funzioni continue e $\mathcal{C}^1$ a tratti, è anch'essa continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti. In particolare
$$\begin{aligned} \widehat{f_n}'(\omega) = -\frac{\pi^2}{2i} e^{-|\omega/n|}\Big[&(\operatorname{sgn}\omega)(e^{-|\omega-1|} - e^{-|\omega+1|})/n + \\ &+ (\operatorname{sgn}(\omega-1))e^{-|\omega-1|} - (\operatorname{sgn}(\omega+1))e^{-|\omega+1|}\Big] \,, \end{aligned} \tag{13}$$
da cui si ricava
$$|\widehat{f_n}'(\omega)| \le \pi^2\big[e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\big] \in L^2(\mathbb{R}) \,, \tag{14}$$
e quindi $\widehat{f_n}' \in L^2(\mathbb{R})$, come si voleva.

3. Si osservi che, grazie ai punti (b) e (c) di cui sopra, anche $\widehat{f}$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti con derivata in $L^2(\mathbb{R})$. Allora, usando il teorema di Plancherel, si ottiene che xf e xf_n appartengono a $L^2(\mathbb{R})$ e valgono
$$F[xf_n(x)](\omega) = \frac{1}{i}\widehat{f_n}'(\omega) \,, \qquad F[xf(x)](\omega) = \frac{1}{i}\widehat{f}'(\omega) \,,$$
Sempre grazie al teorema di Plancherel, per dimostrare che $xf_n(x) \to \pi x f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$ è sufficiente dimostrare che $\widehat{f_n}' \to \pi\widehat{f}'$ in $L^2(\mathbb{R})$. Si osservi che
$$\widehat{f}'(\omega) = -\frac{\pi}{2i}\big[(\operatorname{sgn}(\omega-1))e^{-|\omega-1|} - (\operatorname{sgn}(\omega+1))e^{-|\omega+1|}\big] \,,$$
e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}'(\omega) = \pi\widehat{f}'(\omega) \quad \forall\omega \ne 0, \pm 1 \,,$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-|\omega/n|} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sgn}\omega\,\frac{e^{-|\omega-1|}-e^{-|\omega+1|}}{n} = 0\,.$$

Poiché vale anche (14), possiamo applicare il teorema di Lebesgue e ottenere la convergenza desiderata.