Analisi Reale e Complessa - a.a. 2008/2009

Secondo appello

Esercizio 1

Siano $\{f_n\}_{n\geq 1}$ e f definite da

$$f_n(x) = n\frac{\sin x}{x\left[n(x^2+4)+e^{|x|}\right]}\,, \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

1. Provare che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e calcolare $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

2. Provare che $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ a f. e dedurne il valore del limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$.

Svolgimento

1. Essendo $|\sin x/x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha

   $$|f(x)| \leq \frac{1}{x^2+4} \in L^1(\mathbb{R})\,,$$

   e quindi f è sommabile. Per calcolarne l'integrale, si osservi che

   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\;dx = \mathrm{Im}\left[\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+4)}\;dx\right]\,.$$

   Chiamiamo

   $$\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0,\pm 2i\}\,.$$

   Si osservi che φ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0,\pm 2i\}$, ha un polo del primo ordine in $z=0$ essendo

   $$\lim_{z\to 0} z\varphi(z) = \frac{1}{4}\,, \tag{1}$$

   ed inoltre vale

   $$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+4)} = 0\,.$$

   Siamo allora in grado di applicare i lemmi di Jordan e del cerchio piccolo ed il teorema dei residui e ottenere che

   $$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+4)}\;dx = 2\pi i \operatorname{res}(\varphi,2i) + \pi i \operatorname{res}(\varphi,0)\,.$$

   Grazie a (1) sappiamo già che $\operatorname{res}(\varphi,0) = 1/4$. Quanto al residuo in $2i$, in tale punto φ ha un polo del primo ordine perché

   $$\lim_{z\to 2i}(z-2i)\varphi(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{z(z+2i)} = -\frac{e^{-2}}{8}\,,$$

da cui $\mathrm{res}\,(\varphi, 2i) = -e^{-2}/8$. Allora si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \mathrm{Im}\left[-2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{8} + \pi i \frac{1}{4}\right] = \pi \cdot \frac{1-e^{-2}}{4}\,. \tag{2}$$

2. Banalmente, se $x \neq 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin x}{nx(x^2+4) + xe^{-|x|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)} = f(x)\,.$$

Inoltre, poiché $n|x|(x^2+4) + |x|e^{-|x|} \geq n|x|(x^2+4)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $\neq 0$ vale anche

$$|f_n(x)| = n\frac{|\sin x|}{|x|\left[n(x^2+4) + e^{|x|}\right]} \leq n\frac{|\sin x|}{n|x|(x^2+4)} = |f(x)| \in L^1\mathbb{R}\,,$$

cosicché abbiamo trovato una dominante sommabile. Siamo allora nelle condizioni di applicare il teorema di Lebesgue e concludere che $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$, come si voleva.

Riguardo al limite da calcolare, è noto che

$$f_n \to f \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f\,.$$

Infatti

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f(x)\big|\ dx \overset{n\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Di conseguenza, grazie a (2), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ dx = \pi \cdot \frac{1-e^{-2}}{4}\,.$$

Esercizio 2

Sapendo che

$$t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) \quad \text{per } 0 < t < \pi\,,$$

si chiede di

1. calcolare la somma della serie $(a_0/2) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e studiarne le convergenze puntuale, uniforme e $L^2(0, 2\pi)$;

2. calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$.

Svolgimento

1. La serie a secondo membro è una serie di Fourier di soli coseni, relativa a una funzione 2π-periodica, che deve necessariamente essere pari. Ne consegue che è la serie di Fourier della funzione 2π-periodica f tale che

$$f(t) = |t|\,, \qquad -\pi \le t < \pi\,.$$

Poiché tale funzione è continua, derivabile q.o. con derivata continua a tratti, la sua serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$ (e quindi puntualmente e $L^2(0, 2\pi)$) ad f. Grazie a questo, la somma della serie è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) = |t - 2k\pi| \quad \text{per } (2k-1)\pi \le t < (2k+1)\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Grazie all'identità di Parseval si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{\|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}}{\pi}\,. \tag{3}$$

Poiché

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\; dt = \pi\,,$$

$$\|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2\; dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3\,,$$

da (3) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{7}{6}\pi^2\,.$$

Esercizio 3

Siano $\alpha > 0$ e $\beta > 1$. Si provi che se $\alpha > \beta - 1$, la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^\beta}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento

Denotata con $B_1(0)$ la palla di centro l'origine e raggio 1, dimostriamo separatamente che per $\alpha > 0$ e $\beta > 1$, $\alpha > \beta - 1$, si ha $f \in L^1(B_1(0))$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$, da cui possiamo dedurre che f è sommabile in $\mathbb{R}^2$ per gli stessi valori di α e β.

$f \in L^1(B_1(0))$. Poiché $|\sin t| \le |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$|f(x,y)| \le \frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^\beta} \doteq \varphi(x,y)\,.$$

Se proviamo che $\varphi \in L^1(B_1(0))$ per $\alpha > 0$ e $\beta > 1$, $\alpha > \beta - 1$, allora possiamo dedurre che anche f è sommabile in $B_1(0)$ per gli stessi valori di α e β. Utilizzando le coordinate polari, il teorema di cambiamento di variabili per funzioni non negative ed il teorema di Tonelli, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)} \varphi(x,y)\, dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^{2\alpha}|\cos\vartheta\sin\vartheta|^\alpha}{\rho^{2\beta}}\rho\, d\rho d\vartheta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos\vartheta\sin\vartheta|^\alpha\, d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\beta-2\alpha-1}}\, d\rho\right) < +\infty\end{aligned}$$

perché $\alpha > 0$ (e quindi l'integrale in $d\vartheta$ è finito) e

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\beta-2\alpha-1}}\, d\rho < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta - 2\alpha - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \beta - 1\,.$$

In particolare, $\varphi \in L^1(B_1(0))$ per $\alpha > 0$ e $\beta > 1$, $\alpha > \beta - 1$, come si voleva.

$f \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$. Si osservi che

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^\beta} \doteq \psi(x,y)\,.$$

Se $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0))$, allora anche f è sommabile in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$. Applicando come sopra il teorema del cambio di variabili per funzioni positive ed il teorema di Tonelli si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_1(0)} \psi(x,y)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\beta}}\rho\, d\rho d\vartheta = 2\pi\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\beta-1}}\,.$$

L'ultimo integrale è finito se e solo se $2\beta - 1 > 1$, cioè se e solo se $\beta > 1$. Se ne deduce che, se $\alpha > 0$ e $\beta > 1$, $\alpha > \beta - 1$, ψ è sommabile in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$, e quindi lo è anche f.

Esercizio 4

Siano $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = x^2\chi_{[-1,1]}(x)\,, \qquad f_n(x) = n^2 f(x/n) \quad n \geq 1\,.$$

1. Si calcoli $\widehat{f}$ e se ne deduca il valore dell'integrale

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega/2)\, d\omega\,, \tag{4}$$

dopo aver verificato che la funzione integranda appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che $f_n \to x^2$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $n \to +\infty$.

3. Si provi che $\widehat{f_n} \to -2\pi\delta_0''$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $n \to +\infty$.

Svolgimento

1. Si osservi che $\chi_{[-1,1]}, x\chi_{[-1,1]}(x), x^2\chi_{[-1,1]}(x) = f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}[x^2\chi_{[-1,1]}](\omega) = -\widehat{\chi_{[-1,1]}}''(\omega) = -2\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)\\ = 2\frac{\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^3}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, essendo $f \in L^2(\mathbb{R})$ perché

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{2}{5}\,,$$

grazie al teorema di Plancherel anche $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Poiché

$$\left|\frac{\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega/2)\right| \leq \frac{1}{2}|\widehat{f}(\omega)|\,,$$

anche la funzione integranda in (4) appartiene a $L^2(\mathbb{R})$. Una volta osservato che tale funzione è continua in $\mathbb{R}$ perché $f \in L^1(\mathbb{R})$ e che è funzione reale pari, grazie ancora la teorema di Plancherel e alla formula di dualità si ottiene

$$\begin{aligned}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega/2)\, d\omega =\\ = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega/2)\, d\omega =\\ = \frac{1}{2}\mathcal{F}[\widehat{f}](1/2) = \pi f(-1/2) = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

2. Si osservi preliminarmente che

$$f_n(x) = n^2\frac{x^2}{n^2}\chi_{[-1,1]}(x/n) = x^2\chi_{[-n,n]}(x)]\,.$$

Fissata una funzione test $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha $|f_n(x)v(x)| \leq x^2|v(x)| \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, $f_n(x)v(x) \to x^2v(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: infatti, fissato $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n > |x|$ si ha $f_n(x) = x^2$, e quindi $f_n(x)v(x) = x^2$. Siamo allora nelle condizioni di applicare il teorema di Lebesgue e ottenere

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n, v\rangle = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2v(x)\, dx = \langle x^2, v\rangle\,,$$

come volevasi dimostrare.

3. Poiché è noto che $f_n \to g$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e solo se $\widehat{f_n} \to \widehat{g}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, avendo dimostrato che $f_n \to x^2$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si ottiene

$$\widehat{f_n} \to \mathcal{F}[x^2] = -\widehat{1}'' = -(2\pi\delta_0)'' = -2\pi\delta_0''\,,$$

come si vuole.

Esercizio 5 [facoltativo]

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tranne che in un numero finito di singolarità $z_1, \ldots, z_n$. Dimostrare che se $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, allora $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) = 0$.

Svolgimento

Sia

$$M \doteq \max_{i=1,\ldots,n} |z_i| .$$

Allora, se $R > M$, la circonferenza $C_R(0)$ di centro l'origine e raggio R (percorsa una volta in senso antiorario) contiene tutte le singolarità di f al suo interno. Grazie al teorema dei residui si ha

$$\int_{C_R(0)} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) .$$

Poiché f soddisfa le ipotesi del cerchio grande, si ha anche

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(0)} f(z)\ dz = 0 .$$

Mettendo insieme le due cose si ottiene

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(0)} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) ,$$

da cui $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_i) = 0$, come si voleva.