Analisi Reale e Complessa - a.a. 2008/2009

Terzo appello

Esercizio 1

Sia
$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x^2 - i}\,.$$

(a) Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$;

(b) Si calcoli con metodi di variabile complessa la trasformata di Fourier di f.

Svolgimento

(a) Si osservi che
$$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,,$$
da cui si deduce che $|f|$ è funzione continua che soddisfa
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 |f(x)| = 1\,,$$
e quindi è sommabile in $\mathbb{R}$ per il criterio asintotico del confronto.

(b) Si ha
$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-i} \cdot e^{-i\omega x}\,dx = \frac{e^{i(1-\omega)x}}{x^2-i}\,dx\,.$$
La funzione di variabile complessa
$$\varphi(z) = \frac{e^{i(1-\omega)z}}{z^2-i}$$
ha due poli del primo ordine in $z = \pm e^{i\pi/4}$, perché
$$\begin{aligned}
\lim_{z \to e^{i\pi/4}} (z - e^{i\pi/4})\varphi(z) &= \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{e^{i(1-\omega)z}}{z + e^{i\pi/4}} = \frac{e^{i(1-\omega)e^{i\pi/4}}}{2} e^{-i\pi/4} \\
&= \frac{e^{(i-1)(1-\omega)\sqrt{2}/2}}{2} e^{-i\pi/4}\,, \\
\lim_{z \to -e^{i\pi/4}} (z + e^{i\pi/4})\varphi(z) &= \lim_{z \to -e^{i\pi/4}} \frac{e^{i(1-\omega)z}}{z - e^{i\pi/4}} = -\frac{e^{-i(1-\omega)e^{i\pi/4}}}{2} e^{-i\pi/4} \\
&= -\frac{e^{(1-i)(1-\omega)\sqrt{2}/2}}{2} e^{-i\pi/4}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$
Inoltre
$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2+1} = 0\,.$$
Allora, applicando il lemma di Jordan ed il teorema dei residui si ottiene
$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{res}(\varphi, e^{i\pi/4}) & \text{se} \quad 1-\omega > 0\,, \\ -2\pi i \operatorname{res}(\varphi, -e^{i\pi/4}) & \text{se} \quad 1-\omega < 0\,. \end{cases}$$

Poiché

$$\operatorname{res}(\varphi, e^{i\pi/4}) = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} (z - e^{i\pi/4})\varphi(z)\,, \qquad \operatorname{res}(\varphi, -e^{i\pi/4}) = \lim_{z\to -e^{i\pi/4}} (z + e^{i\pi/4})\varphi(z)\,,$$

usando (1) e sfruttando anche la continuità di $\widehat{f}$ si ottiene

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \pi i e^{(i-1)(1-\omega)\sqrt{2}/2} e^{-i\pi/4} = \pi \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) e^{(i-1)(1-\omega)\sqrt{2}/2} & \text{se} \quad \omega \le 1\,, \\ \pi i e^{(1-i)(1-\omega)\sqrt{2}/2} e^{-i\pi/4} = \pi \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) e^{(1-i)(1-\omega)\sqrt{2}/2} & \text{se} \quad \omega > 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\chi_{[n,+\infty[}(x)}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$, la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$ e la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Poiché, fissato $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n > x$ vale $\chi_{[n,+\infty[}(x) = 0$, si ha anche $f_n(x) = 0$ per ogni $n > x$, e quindi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione nulla. Inoltre,

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{1+n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e quindi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a zero in $\mathbb{R}$. Questo in particolare implica la convergenza a zero in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Riguardo alla convergenza $L^1(\mathbb{R})$, si osservi che $f_n \notin L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ grazie al criterio asintotico del confronto perché

$$\lim_{x\to+\infty} x f_n(x) = 1\,,$$

e la funzione $x \mapsto 1/x$ non è sommabile in $]1,+\infty[$. Quanto alla convergenza $L^2(\mathbb{R})$, si osservi che

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R})\,,$$

e quindi $f_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ per il teorema della convergenza dominata.

Esercizio 3

Sia f la prolungata 4-periodica dispari di

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{per} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Si discuta la convergenza della serie di Fourier di f in $L^2(-2,2)$ e puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$; si dica in particolare a quale valore tale serie converge per $x = -1$;

(b) si calcolino i coefficienti di Fourier di f;

(c) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Svolgimento

Andiamo con ordine.

(a) Poiché f è limitata, essa appartiene a $L^2[-2,2]$ e quindi la sua serie di Fourier converge in tale spazio. Essendo poi f discontinua, sicuramente la sua serie di Fourier non converge uniformemente, mentre converge puntualmente perché f è costante a tratti e quindi soddisfa il criterio di Dini con le condizioni di Hölder. In particolare, in $x = -1$ la serie converge a

$$\frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = -\frac{1}{2},$$

dove $f(-1^-) = 0$ e $f(-1^+) = -1$ sono rispettivamente i limiti sinistro e destro di f in $x = -1$.

(b) Essendo f funzione dispari, la sua serie di Fourier è una serie di soli seni. Sfruttando la simmetria di f, fissato k naturale non nullo e posto $\omega = 2\pi/4 = \pi/2$, si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(k\omega x)\ dx = \int_0^1 \sin(k\omega x)\ dx = -\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega x)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{k\pi}\big[1 - \cos(k\pi/2)\big]\,. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di f si scrive

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\big[1 - \cos(k\pi/2)\big]\sin(kx\pi/2)\,.$$

(c) Grazie all'identità di Parseval vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2 = \frac{2}{4}\|f\|^2_{L^2(-2,2)} = \frac{1}{2}\int_{-1,1} dx = 1\,.$$

Cerchiamo di utilizzre questo risultato per calcolare la somma della serie assegnata. Per farlo, riscriviamo i coefficienti di Fourier di f in un modo più efficace di quello già trovato. Si osservi che

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } k = 2j \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } k = 2j+1 \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Se ne deduce che

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{j\pi}\big[1 - (-1)^j\big] & \text{se } k = 2j \text{ è pari,} \\ \dfrac{2}{(2j+1)\pi} & \text{se } k = 2j+1 \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare, per $k = 2j$ si ha

$$b_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 2i \text{ è pari,} \\ \dfrac{2}{(2i+1)\pi} & \text{se } j = 2i+1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Allora

$$|b_k|^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2j \text{ è pari con } j \text{ pari}\,, \\ \dfrac{4}{(2i+1)^2\pi^2} & \text{se } k = 2j \text{ è pari con } j = 2i+1 \text{ dispari}\,, \\ \dfrac{4}{(2j+1)^2\pi^2} & \text{se } k = 2j+1 \text{ è dispari,} \end{cases}$$

da cui si deduce che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2 &= \sum_{k \text{ dispari}} |b_k|^2 + \sum_{k \text{ pari}} |b_k|^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Esercizio 4

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$, continua, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga

$$u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y)\; dy = x e^{-|x|}\,. \tag{2}$$

(a) Si determini la trasformata di Fourier $\widehat{u}$ di u.

(b) Sia $\alpha > 0$. Si calcoli mediante integrazione diretta la trasformata di Fourier di $\operatorname{sgn}(x) e^{-\alpha|x|}$.

(c) Si calcoli esplicitamente u.

Svolgimento

(a) Sia $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Allora (2) si riscrive

$$u(x) + f * u(x) = x f(x)\,.$$

Trasformando alla Fourier e sapendo che

$$\mathcal{F}[f * u](\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{u}(\omega)\,, \qquad \widehat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\,, \qquad \mathcal{F}[xf(x)] = i\widehat{f}'(\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,,$$

perché la funzione $x \mapsto x f(x)$ è banalmente sommabile su $\mathbb{R}$, si ottiene

$$\widehat{u}(\omega) + \frac{2}{1+\omega^2} \cdot \widehat{u}(\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{u}(\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)(3+\omega^2)}\,.$$

(b) Dopo aver osservato banalmente che la funzione è sommabile su $\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big[\operatorname{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}\big](\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}e^{-i\omega x}\ dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x}\ dx - \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)x}\ dx \\
&= -\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{-(\alpha+i\omega)x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha-i\omega}e^{(\alpha-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\alpha+i\omega} - \frac{1}{\alpha-i\omega} = -\frac{2i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Per il calcolo di u è possibile procedere in due modi. Il primo consiste nel guardare alla trasformata di u come al prodotto di due trasformate,

$$\widehat{u}(\omega) = -\frac{2i\omega}{3+\omega^2}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}\,.$$

Sfruttando quanto fatto al passo precedente, si ha

$$-\frac{2i\omega}{3+\omega^2} = \mathcal{F}\big[\operatorname{sgn}(x)e^{-\sqrt{3}|x|}\big](\omega)\,,$$

e quindi u è il risultato della convoluzione fra le funzioni $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)e^{-\sqrt{3}|x|}$ e $f(x) = e^{-|x|}$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)e^{-\sqrt{3}|y|}e^{-}|x-y|\ dy\,.$$

Tale integrale di convoluzione è calcolabile esplicitamente, ed è lasciato al lettore. Il secondo metodo per il calcolo di u consiste nel decomporre in fratti semplici la trasformata di u,

$$\widehat{u}(\omega) = \frac{A\omega+B}{1+\omega^2} + \frac{C\omega+D}{3+\omega^2}\,,$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ che devono soddisfare il sistema lineare

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 3A+C=-4i \\ 3B+D=0\,. \end{cases}$$

La soluzione del sistema è

$$A=-2i\,,\qquad B=0\,,\qquad C=2i\,,\qquad D=0$$

da cui si ricava

$$\widehat{u}(\omega) = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2} + \frac{2i\omega}{3+\omega^2}\,.$$

Poiché da quanto fatto al punto (b) ricaviamo che

$$-\frac{2i\omega}{1+\omega^2} = \mathcal{F}\big[\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}\big](\omega)\,,\qquad \frac{2i\omega}{3+\omega^2} = -\mathcal{F}\big[\operatorname{sgn}(x)e^{-\sqrt{3}|x|}\big](\omega)\,,$$

otteniamo che

$$u(x) = \operatorname{sgn}(x)\big[e^{-|x|} - e^{-\sqrt{3}|x|}\big]\,.$$