# Analisi Reale e Complessa - a.a. 2008/2009

## Quarto appello

### Esercizio 1

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+4)^2} + a\frac{e^z - 1}{\sin(\pi z/2)} + z\cosh\frac{1}{z}\,,$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro.

1. Classificare le singolarità di $f$ al variare di $a \in \mathbb{C}$.
2. Determinare $a$ in modo che
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,,$$
dove $\gamma$ è il rettangolo di vertici $3-i$, $3+3i$, $-1+3i$, $-1-i$ percorso in senso antiorario.

### Svolgimento

Per semplificare la trattazione poniamo

$$f_1(z) = \frac{e^z}{(z^2+4)^2}\,, \qquad f_2(z) = a\frac{e^z-1}{\sin(\pi z/2)}\,, \qquad f_3(z) = z\cosh\frac{1}{z}\,.$$

1. Oltre che in $z_0 = 0$, le singolarità di $f$ si trovano nei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano almeno una delle equazioni
$$z^2+4 = 0\,, \qquad \sin(\pi z/2) = 0\,.$$
La prima equazione ha per soluzioni $z = \pm 2i$, la seconda $z_k = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. I punti $z = \pm 2i$ sono poli del secondo ordine per la funzione $f_1$ perché sono zeri di molteplicità 2 del denominatore e non annullano il numeratore. Poiché gli altri addendi che compongono $f$ non hanno singolarità in $z = \pm 2i$, ne consegue che questi sono poli del secondo ordine per $f$. I punti $z_k = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ non nullo sono singolarità della funzione $f_2$ per $a \neq 0$, per la quale sono poli del primo ordine perché zeri di molteplicità 1 del denominatore e non annullano il numeratore. Poiché per gli altri due addendi di $f$ tali punti non sono di singolarità, se ne deduce che per $a \neq 0$ $f$ ha in $z_k = 2k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ poli del primo ordine. Inutile dire che se $a = 0$ tali punti non sono singolarità di $f$. Veniamo a $z_0 = 0$. Questo è singolarità eliminabile per $f_2$ perché
$$\lim_{z\to 0} a\frac{e^z-1}{\sin(\pi z/2)} = \lim_{z\to 0} a\frac{e^z-1}{z}\cdot\frac{z}{\sin(\pi z/2)} = \frac{2a}{\pi}\,,$$
mentre non è di singolarità per $f_1$. Per $f_3$ $z_0 = 0$ è singolarità essenziale perché, sfruttando lo sviluppo del cosh, lo sviluppo di Laurent di $f_3$ in $z = 0$ si scrive
$$f_3(z) = z\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{z^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{z^{2k-1}}\,, \tag{1}$$
e quindi contiene infiniti termini con potenze negative di $z$. Se ne deduce che $z_0 = 0$ è singolarità essenziale anche per $f$, qualunque sia il valore del parametro $a \in \mathbb{C}$.

2. Le singolarità di $f$ contenute nel rettangolo sono $z_0 = 0$, $z = 2i$ e $z_1 = 2$. Per il teorema dei residui si ha che
$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i\big[\mathrm{res}\,(f,0) + \mathrm{res}\,(f,2i) + \mathrm{res}\,(f,2)\big]\,.$$
Si osservi che se $\omega \in \mathbb{C}$ è singolaritị $f$, allora
$$\mathrm{res}\,(f,\omega) = \mathrm{res}\,(f_1,\omega) + \mathrm{res}\,(f_2,\omega) + \mathrm{res}\,(f_3,\omega)\,. \tag{2}$$
Grazie a questo e per le osservazioni fatte al punto 1 e grazie a (1) si ha
$$\mathrm{res}\,(f,0) = \mathrm{res}\,(f_3,0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}\,.$$
Sempre sfruttando (2) e le osservazioni del punto 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\mathrm{res}\,(f,2i) = \mathrm{res}\,(f_1,2i) &= \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\big[(z-2i)^2 f_1(z)\big] = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{(z+2i)^2}\right]\\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{e^z(z+2i)^2 - 2(z+2i)e^z}{(z+2i)^4} = \lim_{z\to 2i}\frac{z+2i-2}{(z+2i)^3}e^z\\ &= -\frac{2+i}{32}e^{2i}\,.\end{aligned}$$
Ancora grazie a (2) e alla classificazione fatta la punto 1 si trova
$$\mathrm{res}\,(f,2) = \mathrm{res}\,(f_2,2) = a\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^z-1}{\sin(\pi z/2)} = -a(e^2-1)\frac{2}{\pi}$$
Allora
$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2} - \frac{2+i}{32}e^{2i} - a(e^2-1)\frac{2}{\pi}\right]$$
e quindi si annulla per
$$a = \frac{\pi}{4(e^2-1)}\cdot\left[1 - \frac{2+i}{16}e^{2i}\right]\,.$$

## Esercizio 2

Sia $X$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e sia $v \in X$, $v \neq 0$. Si provi che il funzionale
$$T : X \to X, \quad Tx = \langle x, v\rangle v$$
è lineare e continuo.

### Svolgimento

La linearità di $T$ discende dalla linearità del prodotto scalare rispetto al primo fattore: se $\alpha, \beta \in C$ e $x_1, x_2 \in X$ si ha
$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \langle \alpha x_1 + \beta x_2, v\rangle v = \alpha\langle x_1, v\rangle v + \beta\langle x_2, v\rangle v = \alpha T x_1 + \beta T x_2\,.$$
Per provare che $T$ è continuo è sufficiente provare che è limitato. Denotando con $\|\cdot\|$ la norma indotta dal prodotto scalare in $X$ e grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene
$$\|Tx\| = |\langle x, v\rangle|\|v\| \leq \|v\|^2\|x\|\,,$$
da cui la limitatezza e quindi la continuità di $T$.

### Esercizio 3

Sia $f$ la funzione $2\pi$-periodica tale che nell'intervallo $]-\pi,\pi]$ vale

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{se} \quad -\pi<x<0\,,\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{\pi} & \text{se} \quad 0\le x\le \pi\,.\end{cases}$$

1. Si studino le convergenze puntuale, uniforme e $L^2(-\pi,\pi)$ della serie di Fourier di $f$.
2. Detti $a_k$, $b_k$ i coefficienti della serie di Fourier di $f$, si calcoli la somma della serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} kb_k$.
3. Si studi la convergenza della serie $\sum_{k\ge1} k^2\big[|a_k|^2+|b_k|^2\big]$.

#### Svolgimento

1. Si osservi che

$$\lim_{x\to0} f(x)=1=f(0)\,,\qquad \lim_{x\to-\pi^+} f(x)=0=f(\pi)$$

Se ne deduce che $f$ è funzione continua su $\mathbb{R}$. Inoltre $f$ è derivabile per $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ e la sua derivata nell'intervallo $]-\pi,\pi]$ vale

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \text{se} \quad -\pi<x<0\,,\\[2mm] -\dfrac{1}{\pi} & \text{se} \quad 0<x<\pi\,.\end{cases}$$

ed è continua a tratti e limitata poiché

$$\lim_{x\to0^-} f'(x)=0$$

essendo $x\mapsto \sin x/x$ funzione analitica pari. Grazie al criterio di convergenza totale, la serie di Fourier di $f$ converge totalmente (e quindi uniformemente e puntualmente) in $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo $[-\pi,\pi]$ un insieme di misura finita, la convergenza uniforme implica anche quella in $L^2(-\pi,\pi)$.

2. Se $a_k$, $b_k$ sono i coefficienti della serie di Fourier di $f$, la serie di Fourier di $f'$ si scrive

$$s[f'](x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big[kb_k\cos(kx)-ka_k\sin(kx)\big]\,.$$

Poiché $f'$ è continua a tratti e soddisfa le condizioni di Lipschitz in tutti gli intervalli del tipo $]k\pi,(k+1)\pi[$ con $k\in\mathbb{Z}$ (ricordiamo ancora che $x\sin x/x$ è analitica), la sua serie di Fourier converge puntualmente per il criterio di Dini. Si deduce che vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kb_k=s[f'](0)=\frac{f'(0+)+f'(0-)}{2}=-\frac{1}{2\pi}\,.$$

3. Poiché $f'\in L^2(-\pi,\pi)$ perché continua a tratti e quindi limitata, grazie all'identità di Parseval si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\big[|a_k|^2+|b_k|^2\big]=\frac{1}{\pi}\|f'\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}\,,$$

e quindi la serie converge.

**Esercizio 4**

Sia

$$f_n(x) = (\operatorname{sgn} x)e^{-|x|/n} \qquad n \geq 1\,.$$

1. Si provi che $f_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 1$.

2. Si calcoli la derivata di $f_n$ nel senso delle distribuzioni.

3. Si calcoli il limite della successione $\{\widehat{f_n'}\}_{n\geq 1}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

**Svolgimento**

1. Poiché $|f_n(x)| \leq e^{-|x|/n} \in L^1(\mathbb{R})$ essendo

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n}\; dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-|x|/n}\; dx = n\,,$$

e le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ definiscono delle distribuzioni temperate, si ha $f_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. $f_n$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}^{<0}$ e $\mathbb{R}^{>0}$ e presenta un punto di salto in $x = 0$. Si ottiene

$$f_n'(x) = -\frac{\operatorname{sgn} x}{n} e^{-|x|/n} \operatorname{sgn} x + 2\delta_0 = -\frac{e^{-|x|/n}}{n} + 2\delta_0\,.$$

3. Si osservi che

$$-\frac{e^{-|x|/n}}{n} \overset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{\to} 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Infatti, fissata una funzione test $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, poiché $e^{-|x|/n}/n \to 0$ puntualmente e $|\varphi(x)e^{-|x|/n}/n| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, siamo nelle condizioni di applicare il teorema di convergenza dominata e ottenere

$$\lim_{n\to+\infty} \langle -\frac{e^{-|x|/n}}{n}, \varphi\rangle = -\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x|/n}}{n} \varphi(x)\; dx = 0\,.$$

Allora $f_n' \to 2\delta_0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, e quindi $\widehat{f_n'} \to \widehat{2\delta_0} = 2$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.