

ANALISI MATEMATICA 2
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Appello del 01.02.2010

Esercizio 1 [10 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4 - \sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità di f .
2. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 1$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(0, 1)$ una funzione $y = g(x)$ (sugg.: si riscriva $f(x, y) = 1$ in modo opportuno).
3. Si provi che g ha un minimo locale in $x = 0$.

Esercizio 2 [10 punti]

Data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si determinino gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}(t)$ è matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine.
2. In tali intervalli si determini la matrice $A(t)$ che definisce il sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ di cui \mathbf{W} è matrice risolvete.
3. Nell'intervallo massimale di cui sopra contenente $t = 1$ si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ con $\mathbf{b}(t) = (te^t, 0, -t)$.

Esercizio 3 [10 punti]

Sia dato il campo vettoriale in \mathbb{R}^3

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}.$$

1. Si provi che \mathbf{F} è conservativo e se ne calcoli il potenziale U tale che $U(0, 0, 0) = 0$.
2. Sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : U(x, y, z) = 0, x^2 + y^2 < 1\},$$

orientata in modo che nell'origine il versore normale \mathbf{n} sia \mathbf{k} . Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{3/2} \mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso Σ .

Esercizio 4 (facoltativo)

Data la funzione di variabile complessa $f(z) = e^{1/z}/(z-1)^2$ se ne classifichino le singolarità e si calcolino i residui nei suoi poli.

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

La parte facoltativa deve essere svolta dopo aver completato tutti gli altri esercizi.