

ANALISI MATEMATICA 2
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2010

Esercizio 1 [12 punti]

Sia

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 - z^4 = 1, x + y + 2z = 0\}.$$

1. Provare che esistono due funzioni $y = g(x)$ e $z = h(x)$ definite in un intorno \mathcal{U} di $x = 1$, tali che $g(1) = 1$, $h(1) = -1$ e per cui $(x, g(x), h(x)) \in \Gamma$ per ogni $x \in \mathcal{U}$.
2. Provare che g è strettamente decrescente in un intorno di $x = 1$.
3. Provare che h ha in $x = 1$ un punto di estremo.
4. **Facoltativo:** provare che esiste un punto di Γ di quota (coordinata z) massima (si tenga presente che $(x + y)^4 \leq 8(x^4 + y^4)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$).
5. Verificare che tutti i punti di Γ sono regolari.
6. Trovare il punto di Γ di quota (coordinata z) massima.

Esercizio 2 [9 punti]

Sia dato il sistema autonomo di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} x'' = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4}, \\ y'' = \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4}. \end{cases} \quad (*)$$

1. Si provi che il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} \mathbf{i} + \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4} \mathbf{j}$$

è conservativo e se ne calcoli un potenziale $U = U(x, y)$.

2. Si scriva un integrale primo per il sistema (*).
3. Sfruttando il punto 2, si provi che un problema di Cauchy per (*) ha soluzione massimale definita su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3 [7 punti]

Calcolare l'integrale di variabile complessa

$$\int_{C_3(0)} \frac{\operatorname{sen}(z - i)}{(z^2 + 1)(z - 2i)^2} dz,$$

dove $C_3(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 percorsa una volta in senso antiorario.

Esercizio 4 [5 punti]

Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva di equazione polare $\rho = \operatorname{sen}(2\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

La parte facoltativa deve essere svolta dopo aver completato tutti gli altri esercizi.