ANALISI MATEMATICA 2

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.09.2010

Esercizio 1 [9 punti]

Sia $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2\,,\ y^2+(z-2)^2=1\}$.

1. Provare che tutti i punti di Γ sono regolari.
2. Determinare lo spazio tangente a Γ nel punto $(\sqrt{3},1,2)$.
3. Provare che Γ è un insieme compatto.
4. Data la funzione $f(x,y,z)=e^x$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, dimostrare che ammette massimo e minimo vincolati a Γ e calcolarne il valore usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 2 [9 punti]

Sia Σ la superficie ottenuta per rotazione completa attorno all'asse z della curva contenuta nel piano xz di equazioni parametriche

$$x=\frac{\cos\vartheta}{1+\operatorname{sen}\vartheta}\,,\quad z=1+\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{1+\operatorname{sen}\vartheta}\qquad \vartheta\in[0,\pi/2]\,.$$

1. Calcolare l'area di Σ.
2. Calcolare il flusso del campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i}+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j}+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$
attraverso Σ orientata in modo che nel punto $(0,0,3/2)$ il versore normale sia $\mathbf{k}$.

Esercizio 3 [9 punti]

Sia data l'equazione differenziale esatta

$$y'=-\frac{e^x}{2y(e^x+y^2)}\,. \tag{$*$}$$

1. Provare che un problema di Cauchy per $(*)$ ha un'unica soluzione.
2. Si calcolino le soluzioni di $(*)$ in forma implicita.
3. Provare che un problema di Cauchy per $(*)$ ha soluzione massimale limitata.
4. (**Facoltativo**) Si consideri un problema di Cauchy con dato iniziale $y(0)=y_0>0$. Provare che la soluzione massimale verifica
$$y'(x)\le y'(0)=-\frac{1}{2y_0(1+y_0^2)}$$
per ogni $x>0$ nel suo intervallo di esistenza. Dedurre che tale soluzione massimale non è definita in tutta la semiretta $[0,+\infty[$. Ciò è in contrasto con quanto provato al punto 3?

Esercizio 4 [6 punti]

Si studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\operatorname{sen}y}{x^2+y^2} & \text{se}\quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\[2mm] 0 & \text{se}\quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.