Analisi Matematica 2 - a.a. 2009/2010

Primo appello

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4 - \operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità di f.
2. Si provi che l'equazione $f(x,y) = 1$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,1)$ una funzione $y = g(x)$ (sugg.: si riscriva $f(x,y) = 1$ in modo opportuno).
3. Si provi che g ha un minimo locale in $x = 0$.

Svolgimento

1. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funzione è rapporto di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ con denominatore non nullo e quindi è essa stessa di classe $\mathcal{C}^\infty$. Resta da studiare la regolarità in $(0,0)$. Innanzitutto studiamo la continuità di f nell'origine andando a calcolarne il limite, studiando separatamente il comportamento di

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2}\,.$$

Poiché

$$0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2\,,$$

vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0\,.$$

È possibile arrivare alla stessa conclusione è passando in coordinate polari:

$$\left.\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta}} = \frac{\rho^4\cos^4\vartheta + \rho^4\operatorname{sen}^4\vartheta}{\rho^2} = \rho^2(\cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^4\vartheta)\,,$$

da cui si ottiene che

$$0 \leq \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \left|\rho^2(\cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^4\vartheta)\right| \leq 2\rho^2 \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0\,,$$

e quindi la conclusione. Riguardo alla seconda quantità di cui dobbiamo studiare il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$, si osservi che

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|xy|}{2}\,,$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)\,,$$

da cui la continuità di f nell'origine. Quanto alla derivabilità, si noti che $f(x,0) = x^2$ e $f(0,y) = y^2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, e quindi f ha derivate parziali entrambe nulle nell'origine. Veniamo alla differenziabilità. Poiché $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$, affinché f sia differenziabile nell'origine deve essere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,,$$

cioè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4-\operatorname{sen}(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\,. \tag{1}$$

Calcoliamo il limite. Sfruttando il lavoro fatto sopra si ottiene subito che

$$0 \le \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\,.$$

Riguardo alla parte del limite che coinvolge la funzione seno, passando in coordinate polari si ottiene

$$\left|\left.\frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta}}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\left(\rho^4\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\right)}{\rho^3}\right| \le \left|\frac{\rho^4\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}{\rho^3}\right| \le \rho\,,$$

e quindi

$$0 \le \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \left|\frac{\operatorname{sen}\left(\rho^4\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\right)}{\rho^3}\right| \le \rho \to 0 \quad \text{per } \rho\to 0\,,$$

da cui si deduce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\,.$$

Allora (1) è verificata e f è differenziabile anche nell'origine.

2. Si osservi preliminarmente che $f(0,1) = 1$, e quindi $(0,1)$ è soluzione dell'equazione $f(x,y) = 1$. Tale equazione si riscrive

$$x^4+y^4-\operatorname{sen}(x^2y^2) = x^2+y^2\,,$$

e quindi studiare le soluzioni di $f(x,y) = 1$ in un intorno di $(0,1)$ equivale a studiare le soluzioni di $\varphi(x,y) = 0$ dove

$$\varphi(x,y) = x^4+y^4-\operatorname{sen}(x^2y^2)-x^2-y^2\,.$$

Si osservi che

$$\partial_y\varphi(x,y) = 4y^3-2x^2y\cos(x^2y^2)-2y\,,$$

da cui $\partial_y\varphi(0,1) = 2 \ne 0$. Per il teorema di Dini esistono un intorno $\mathcal{U}$ di $x=0$ ed un'unica funzione $g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ tali che $\varphi(x,g(x)) = 0$ per ogni $x\in\mathcal{U}$ e $g(0) = 1$, come si voleva.

3. Sempre dal teorema di Dini, essendo φ di classe $\mathcal{C}^\infty$, anche g ha tale regolarità ed inoltre

$$g'(x) = -\frac{\partial_x\varphi(x, g(x))}{\partial_y\varphi(x, g(x))}\,. \tag{2}$$

Poiché

$$\partial_x\varphi(x, y) = 4x^3 - 2xy^2\cos(x^2y^2) - 2x\,,$$

si ottiene

$$g'(0) = -\frac{\partial_x\varphi(0, 1)}{\partial_y\varphi(0, 1)} = 0\,,$$

e quindi g ha un punto critico in $x = 0$. Deriviamo ulteriormente (2):

$$g''(x) = \\ = -\frac{\big[\partial^2_{xx}\varphi(x, g(x)) + \partial^2_{xy}\varphi(x, g(x))g'(x)\big]\partial_y\varphi(x, g(x)) - \partial_x\varphi(x, g(x))\partial^2_{xy}\varphi(x, g(x))g'(x)}{\big[\partial_y\varphi(x, g(x))\big]^2}\,.$$

Sfruttando il fatto che $g'(0) = \partial_x\varphi(0, 1) = 0$, si ottiene

$$g''(0) = -\frac{\partial^2_{xx}\varphi(0, 1)}{\partial_y\varphi(0, 1)}\,.$$

Poiché

$$\partial^2_{xx}\varphi(x, y) = 12x^2 - 2y^2\cos(x^2y^2) + 4x^2y^4\,\mathrm{sen}(x^2y^2) - 2\,,$$

si ha $\partial^2_{xx}\varphi(0, 1) = -4$, da cui si deduce che $g''(0) = 2$, e quindi g ha un minimo relativo in $x = 0$.

Esercizio 2

Data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

1. Si determinino gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}(t)$ è matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine.

2. In tali intervalli si determini la matrice $A(t)$ che definisce il sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ di cui $\mathbf{W}$ è matrice risolvente.

3. Nell'intervallo massimale di cui sopra contenente $t = 1$ si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ con $\mathbf{b}(t) = (te^t, 0, -t)$.

Svolgimento

1. Poiché $\det\mathbf{W}(t) = t^3$, si ha $\det\mathbf{W}(t) \neq 0$ se e solo se $t \neq 0$, e quindi gli intervalli massimali dove $\mathbf{W}$ è matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari sono $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$.

2. La matrice $\mathbf{W}$ è soluzione dell'equazione $\mathbf{W}' = A(t)\mathbf{W}$, e quindi $A(t) = \mathbf{W}'(t)(\mathbf{W}(t))^{-1}$. Poiché

$$\mathbf{W}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

non resta che calcolare $(\mathbf{W}(t))^{-1}$. Essendo $\mathbf{W}$ matrice triangolare superiore, tale è anche $\mathbf{W}^{-1}$. Sfruttando questa informazione si ottiene che

$$\big(\mathbf{W}(t)\big)^{-1} = \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} t^2 & -t^3 & 0 \\ 0 & t^2 & -t^3 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$A(t) = \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 & -t^3 & 0 \\ 0 & t^2 & -t^3 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & 1 & t \\ 0 & 1/t & 1 \\ 0 & 0 & 1/t \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare di cui $\mathbf{W}$ è matrice risolvente si scrive

$$\begin{cases} x' = x/t + y + tz \\ y' = y/t + z \\ z' = z/t\,. \end{cases}$$

3. L'intervallo massimale in cui calcolare l'integrale generale è $]0, +\infty[$. Poiché $\mathbf{W}$ è matrice risolvente del sistema omogeneo associato, l'integrale generale di tale sistema si scrive

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2t^2 + c_3t^3 \\ c_2t + c_3t^2 \\ c_3t \end{pmatrix},$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Per calcolare l'integrale generale del sistema non omogeneo non resta che procurarci una soluzione particolare $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Usando il metodo della variazione delle costanti questa si scrive

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t)\int_1^t \big(\mathbf{W}(s)\big)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds = \mathbf{W}(t)\int_1^t \begin{pmatrix} 1/s & -1 & 0 \\ 0 & 1/s & -1 \\ 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} se^s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} ds$$

$$= \mathbf{W}(t)\int_1^t \begin{pmatrix} e^s \\ s \\ -1 \end{pmatrix} ds = \mathbf{W}(t)\begin{pmatrix} e^s\big|_1^t \\ s^2/2\big|_1^t \\ -s\big|_1^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t - e \\ t^2/2 - 1/2 \\ 1 - t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t(e^t - e) - t^2/2 + t^3 - t^4/2 \\ -t^3/2 + t^2 - t/2 \\ t - t^2 \end{pmatrix}.$$

Allora l'integrale generale del sistema non omogeneo si scrive

$$\begin{cases} \widetilde{x}(t) = c_1 + c_2t^2 + c_3t^3 + t(e^t - e) - t^2/2 + t^3 - t^4/2 \\ \widetilde{y}(t) = c_2t + c_3t^2 - t^3/2 + t^2 - t/2 \\ \widetilde{z}(t) = c_3t + t - t^2\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia dato il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che $\mathbf{F}$ è conservativo e se ne calcoli il potenziale U tale che $U(0,0,0)=0$.
2. Sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : U(x,y,z)=0\,,\ x^2+y^2<1\right\},$$

   orientata in modo che nell'origine il versore normale $\mathbf{n}$ sia $\mathbf{k}$. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{3/2}\mathbf{F}(x,y,z)$ attraverso Σ.

Svolgimento

1. Si osservi che, dette F_1, F_2, F_3 le componenti di $\mathbf{F}$ lungo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente, si ha

$$\partial_y F_1(x,y,z) = \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = \partial_x F_2(x,y,z)\,,$$
$$\partial_z F_1(x,y,z) = 0 = \partial_x F_3(x,y,z)\,,$$
$$\partial_z F_2(x,y,z) = 0 = \partial_y F_3(x,y,z)\,,$$

   da cui si deduce che $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=0$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (o, equivalentemente, che la forma differenziale $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ è chiusa in $\mathbb{R}^3$), e quindi che $\mathbf{F}$ è conservativo essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso. Per calcolare un potenziale $\widetilde{U}$, integriamo F_1 rispetto ad x ottenendo che

$$\widetilde{U}(x,y,z) = -\sqrt{x^2+y^2+1} + \psi(y,z)\,, \tag{3}$$

   dove ψ è funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Poiché deve essere

$$\partial_y\widetilde{U}(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,,$$

   da (3) deduciamo che deve essere $\partial_y\psi(y,z)=0$, cioè che la funzione ψ dipende dalla sola variabile z, e quindi possiamo scrivere $\psi=\psi(z)$. Poiché poi deve essere $\partial_z\widetilde{U}=e^z$, ancora da (3), si ottiene che $\psi'(z)=e^z$, e quindi possiamo scegliere $\psi(z)=e^z$. Allora si ottiene

$$\widetilde{U}(x,y,z) = -\sqrt{x^2+y^2+1} + e^z\,,$$

   ed essendo $\widetilde{U}(0,0,0)=0$, si ha che il potenziale cercato è proprio $\widetilde{U}$, e quindi $U=\widetilde{U}$.

2. Poiché Σ è contenuta nell'insieme degli zeri di U, il suo versore normale è parallelo a $\nabla U = \mathbf{F}$, e quindi a $\mathbf{G}$. Inoltre, essendo

$$\big\langle \mathbf{G}(x,y,z), \mathbf{k}\big\rangle = e^z(x^2+y^2+1)^{3/2} > 0\,,$$

   il campo vettoriale $\mathbf{G}$ ha anche lo stesso verso del versore normale $\mathbf{n}$. Se ne deduce che

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) = \iint_\Sigma \langle\mathbf{G},\mathbf{n}\rangle\,dS = \iint_\Sigma \|\mathbf{G}\|\,dS\,.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, osserviamo che Σ può essere parametrizzata come una superficie cartesiana. Infatti, dalla definizione di Σ e usando l'espressione di U si ottiene

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,,\ x^2 + y^2 < 1\right\},$$

e quindi una parametrizzazione di Σ è

$$\sigma(x, y) = \big(x, y, (1/2)\ln(x^2 + y^2 + 1)\big) \qquad (x, y) \in B_1(0, 0)\,.$$

Riguardo a $\|\mathbf{G}\|$ si ottiene

$$\|\mathbf{G}(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + 1)^{3/2}\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + 1)^{3/2}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} + e^{2z}}\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{G}(\sigma(x, y))\| &= \big\|\mathbf{G}\big(x, y, (1/2)\ln(x^2 + y^2 + 1)\big)\big\| \\ &= (x^2 + y^2 + 1)^{3/2}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} + (x^2 + y^2 + 1)} \\ &= (x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 + 1)^2}\,.\end{aligned}$$

Mettendo assieme quanto trovato si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) &= \iint_{B_1(0,0)} (x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 + 1)^2}\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}}\,dxdy \\ &= \iint_{B_1(0,0)} \left[x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 + 1)^2\right] dxdy\,,\end{aligned}$$

dove si è sfruttato la formula dell'integrale superficiale su una superficie cartesiana. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\rho^2 + (\rho^2 + 1)^2\right]\rho\, d\rho d\vartheta = 2\pi\int_0^1 \left[\rho^3 + \rho(\rho^2 + 1)^2\right] d\rho \\ &= \frac{2\pi}{4}\rho^4\Big|_0^1 + \frac{2\pi}{6}(\rho^2 + 1)^3\Big|_0^1 = \frac{17\pi}{6}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo potuto usare le formule di riduzione per gli integrali doppi su rettangoli essendo la funzione integranda continua.

Esercizio 4

Data la funzione di variabile complessa $f(z) = e^{1/z}/(z-1)^2$ se ne classifichino le singolarità e si calcolino i residui nei suoi poli.

Svolgimento

È evidente che le singolarità di f sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Osservando il comportamento della restrizione di f all'asse reale si nota che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{(x-1)^2} = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{(x-1)^2} = +\infty\,,$$

da cui si deduce che f non ha limite per $z \to 0$ e quindi che $z_0 = 0$ è singolarità essenziale per f. Riguardo a $z_1 = 1$, poiché

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \to 1} e^{1/z} = e \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

si deduce che $z_1 = 1$ è un polo del secondo ordine per f. L'unico residuo da calcolare è allora $\operatorname{res}(f, 1)$: usando la formula per il calcolo del residuo di una funzione in un suo polo si ottiene

$$\operatorname{res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \big[(z-1)^2 f(z) \big] = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} e^{1/z} = - \lim_{z \to 1} \frac{e^{1/z}}{z^2} = -e\,.$$