

Analisi Matematica 2 - a.a. 2009/2010

Secondo appello

Esercizio 1

Sia

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 - z^4 = 1, x + y + 2z = 0\}.$$

1. Provare che esistono due funzioni $y = g(x)$ e $z = h(x)$ definite in un intorno $\mathcal{U}$ di $x = 1$, tali che $g(1) = 1$, $h(1) = -1$ e per cui $(x, g(x), h(x)) \in \Gamma$ per ogni $x \in \mathcal{U}$.
2. Provare che g è strettamente decrescente in un intorno di $x = 1$.
3. Provare che h ha in $x = 1$ un punto di estremo.
4. (**Facoltativo**) Provare che esiste un punto di Γ di quota (coordinata z) massima.
5. Verificare che tutti i punti di Γ sono regolari.
6. Trovare il punto di Γ di quota (coordinata z) massima.

Svolgimento

1. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^4 + y^4 - z^4, x + y + 2z), \quad (1)$$

e chiamiamo $f_1(x, y, z) = x^4 + y^4 - z^4$ e $f_2(x, y, z) = x + y + 2z$ le sue componenti. Allora $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(x, y, z) = (1, 0)\}$. Una volta osservato che $\mathbf{f}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, proviamo ad applicare il teorema di Dini per verificare se l'equazione $\mathbf{f}(x, y, z) = (1, 0)$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(1, 1, -1) \in \Gamma$ le due funzioni g e h . Si ha

$$J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & -4z^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

e quindi il minore relativo alle derivate parziali rispetto ad y e z in $(1, 1, -1)$ è

$$\begin{pmatrix} \partial_y f_1(1, 1, -1) & \partial_z f_1(1, 1, -1) \\ \partial_y f_2(1, 1, -1) & \partial_z f_2(1, 1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

che è non singolare. Allora sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini e quindi le funzioni g e h richieste esistono. Inoltre, essendo $\mathbf{f}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, sono anch'esse di classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Sempre per il teorema di Dini si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \partial_y f_1(x, g(x), h(x)) & \partial_z f_1(x, g(x), h(x)) \\ \partial_y f_2(x, g(x), h(x)) & \partial_z f_2(x, g(x), h(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x, g(x), h(x)) \\ \partial_x f_2(x, g(x), h(x)) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 4g^3(x) & -4h^3(x) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = - \frac{1}{8g^3(x) + 4h^3(x)} \begin{pmatrix} 2 & 4h^3(x) \\ -1 & 4g^3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$g'(x) = - \frac{2x^3 + h^3(x)}{2g^3(x) + h^3(x)}, \quad h'(x) = \frac{x^3 - g^3(x)}{2g^3(x) + h^3(x)}. \quad (3)$$

Allora

$$g'(1) = -\frac{2 + h^3(1)}{2g^3(1) + h^3(1)} = -1,$$

e quindi $g'(x) < 0$ in un intorno di $x = 1$, essendo g' funzione continua, da cui la stretta decrescenza di g in un intorno di $x = 1$.

3. Da (3) deduciamo che

$$h'(1) = \frac{1 - g^3(1)}{2g^3(1) + h^3(1)} = 0,$$

e quindi $x = 1$ è punto stazionario per h . Per studiarne la natura calcoliamo h'' (ricordiamo che h è di classe C^∞): sempre da (3) si ottiene

$$h''(x) = \frac{[3x^2 - 3g^2(x)g'(x)][2g^3(x) + h^3(x)] - [x^3 - g^3(x)]D[2g^3(x) + h^3(x)]}{[2g^3(x) + h^3(x)]^2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} h''(1) &= \frac{[3 - 3g^2(1)g'(1)][2g^3(1) + h^3(1)] - [1 - g^3(1)]D[2g^3(x) + h^3(x)]\big|_{x=1}}{[2g^3(1) + h^3(1)]^2} \\ &= \frac{3 - 3g^2(1)g'(1)}{2g^3(1) + h^3(1)} = 6 > 0, \end{aligned}$$

e quindi $x = 1$ è punto di minimo per h .

4. Si tratta di dimostrare che la funzione $\varphi(x, y, z) = z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ha massimo su Γ . Tale funzione è banalmente di classe C^∞ , ed in particolare è continua. Se proviamo che Γ è un insieme compatto (chiuso e limitato), possiamo concludere invocando il teorema di Weierstrass. Γ è sicuramente un insieme chiuso, essendo un insieme di livello della funzione continua $\mathbf{f}$ introdotta in (1). Per quanto riguarda la limitatezza, si osservi che i punti di Γ sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - z^4 = 1 \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che $x^4 + y^4 = 1 + z^4$. Poiché

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2),$$

si ha

$$(x + y)^4 = [(x + y)^2]^2 \leq 4(x^2 + y^2)^2 \leq 8(x^4 + y^4),$$

e quindi

$$(x + y)^4 \leq 8(x^4 + y^4) = 8 + 8z^4 \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma.$$

Usando questa informazione, dalla seconda equazione si deduce che

$$z^4 = \frac{(x + y)^4}{16} \leq \frac{1 + z^4}{2},$$

e quindi deve essere $|z| \leq 1$. Allora dalla prima equazione si ricava

$$x^4 + y^4 = 1 + z^4 \leq 2 \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma,$$

da cui la limitatezza di Γ , dovendo essere anche $|x|, |y| \leq 1$.

5. Grazie a (2) gli eventuali punti irregolari di Γ dovrebbero soddisfare

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \\ 8x^3 + 4z^3 = 0 \\ 8y^3 + 4z^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - z^4 = 1 \\ x + y + 2z = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 2x^3 + z^3 = 0 \\ 2y^3 + z^3 = 0 \\ 2x^4 - z^4 = 1 \\ 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ricava che deve essere $z = -x$, che usata nella quarta fornisce $x = \pm 1$, e quindi $z = \mp 1$: è evidente che questi valori di x e z non risolvono la seconda equazione. Allora il sistema non ha soluzione e Γ non ha punti irregolari.

6. Innanzitutto osserviamo che, poiché tutti i punti di Γ sono regolari, possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare il massimo della funzione $\varphi(x, y, z) = z$ su Γ , che allora è assunto nei punti critici della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = z - \lambda(x^4 + y^4 - z^4 - 1) - \mu(x + y + 2z).$$

Questi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -4\lambda x^3 - \mu = 0 \\ -4\lambda y^3 - \mu = 0 \\ 1 + 4\lambda z^3 - 2\mu = 0 \\ x^4 + y^4 - z^4 - 1 = 0 \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che deve essere $\lambda(x^3 - y^3) = 0$. Una soluzione di questa equazione è $\lambda = 0$, ma questo implicherebbe anche $\mu = 0$ e nella terza equazione si otterrebbe $1 = 0$, che è assurdo. Allora necessariamente deve essere $x = y$, quindi l'ultima equazione si scrive $x + z = 0$ e la quarta diviene $x^4 = 1$, le cui soluzioni sono $x = \pm 1$. Se ne deduce che i punti critici vincolati sono $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$, a cui sono associati i moltiplicatori $\lambda = -1/4$, $\mu = 1$ e $\lambda = 1/4$, $\mu = 1$ rispettivamente. Poiché $\varphi(1, 1, -1) = -1$ e $\varphi(-1, -1, 1) = 1$ la quota massima cercata è 1.

In alternativa, sfruttando quanto fatto al punto 4, poiché già sappiamo che $z \leq 1$ per ogni $(x, y, z) \in \Gamma$ e osservato che $(-1, -1, 1) \in \Gamma$, si può immediatamente concludere che tale punto è quello cercato.

Esercizio 2

Sia dato il sistema autonomo di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} x'' = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4}, \\ y'' = \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4}. \end{cases} \quad (*)$$

1. Si provi che il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} \mathbf{i} + \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4} \mathbf{j}$$

è conservativo e se ne calcoli un potenziale $U = U(x, y)$.

2. Si scriva un integrale primo per il sistema (*).
3. Sfruttando il punto 2, si provi che un problema di Cauchy per (*) ha soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento

1. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso $\mathbf{F}$ è conservativo se e solo se la forma differenziale ad esso associata,

$$\omega(x, y) = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} dx + \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4} dy,$$

è chiusa, e questo si verifica facilmente perché

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} \right] = 3x^2 \frac{1 - 3(x^3 + y)^4}{[1 + (x^3 + y)^4]^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4} \right].$$

Per calcolare un potenziale U , poiché

$$\int \frac{x^3 + y}{1 + (x^3 + y)^4} dy = \frac{1}{2} \arctan(x^3 + y)^2 + c,$$

si ha

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \arctan(x^3 + y)^2 + \varphi(x),$$

con φ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ della sola x . Derivando rispetto ad x si ottiene che deve essere

$$\frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} = \partial_x U(x, y) = \frac{3x^2(x^3 + y)}{1 + (x^3 + y)^4} + \varphi'(x),$$

e quindi $\varphi'(x) = 0$. Scelta $\varphi(x) \equiv 0$, si ottiene che un potenziale di $\mathbf{F}$ è

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \arctan(x^3 + y)^2.$$

2. Poiché il sistema (*) si riscrive $\mathbf{y}'' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, e $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale conservativo, un integrale primo di (*) è l'integrale dell'energia

$$E(x, y, x', y') = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - U(x, y) = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{1}{2} \arctan(x^3 + y)^2.$$

3. Dato l'integrale dell'energia e una soluzione massimale $]a_0, b_0[\ni t \mapsto (x(t), y(t))$ di (*) di un problema di Cauchy con dati iniziali

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0,$$

esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{2} - \frac{1}{2} \arctan(x^3(t) + y(t))^2 = c \quad \forall t \in]a_0, b_0[.$$

Allora

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \arctan(x^3(t) + y(t))^2 + 2c \leq \frac{\pi}{2} + 2c \quad \forall t \in]a_0, b_0[$$

Se ne deduce che le derivate x' e y' sono limitate, e quindi $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$ sono lipschitziane. Allora esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t) - x_0| + |x_0| = |x(t) - x(t_0)| + |x_0| \leq L|t - t_0| + |x_0| \\ |y(t)| &\leq |y(t) - y_0| + |y_0| = |y(t) - y(t_0)| + |y_0| \leq L|t - t_0| + |y_0| \end{aligned} \quad \forall t \in]a_0, b_0[.$$

Se $a_0 \in \mathbb{R}$, si deduce che x, y e le loro derivate restano limitate in un intorno di a_0 , contro l'ipotesi che $]a_0, b_0[$ è intervallo massimale di esistenza, e dunque $a_0 = -\infty$. In modo analogo si dimostra che $b_0 = +\infty$, e quindi la soluzione massimale di un problema di Cauchy per (*) è definita su tutto $\mathbb{R}$, come si voleva.

Esercizio 3

Calcolare l'integrale di variabile complessa

$$\int_{C_3(0)} \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{(z^2+1)(z-2i)^2} dz,$$

dove $C_3(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3 percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento

La funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{(z^2+1)(z-2i)^2}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ privato dei punti $z_1 = i$, $z_2 = -i$ e $z_3 = 2i$, che sono zeri del denominatore e sono tutti punti interni alla circonferenza $C_3(0)$. Siamo allora nelle condizioni di applicare il teorema dei residui ed ottenere

$$\int_{C_3(0)} \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{(z^2+1)(z-2i)^2} dz = 2\pi i [\operatorname{res}(f, i) + \operatorname{res}(f, -i) + \operatorname{res}(f, 2i)].$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-2i)^2} = -\frac{1}{2i}, \\ \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{(z-i)(z-2i)^2} = \frac{\operatorname{sen}(-2i)}{18i} = -\frac{\sinh 2}{18}, \\ \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\operatorname{sen}(z-i)}{z^2+1} = -\frac{\operatorname{sen} i}{3} = -i \frac{\sinh 1}{3}. \end{aligned}$$

Allora

- $z_1 = i$ è singolarità eliminabile per f e quindi $\operatorname{res}(f, i) = 0$;
- $z_2 = -i$ è polo semplice per f e $\operatorname{res}(f, -i) = -\sinh 2/18$;
- $z_3 = 2i$ è polo doppio per f .

Quanto al residuo in $z_3 = 2i$, si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} [(z - 2i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{\operatorname{sen}(z - i)}{z^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z^2 + 1) \cos(z - i) - 2z \operatorname{sen}(z - i)}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{3 \cos i + 4i \operatorname{sen} i}{9} \\ &= \frac{4 \operatorname{senh} 1 - 3 \cosh 1}{9}.\end{aligned}$$

L'integrale da calcolare allora vale

$$\begin{aligned}\int_{C_3(0)} \frac{\operatorname{sen}(z - i)}{(z^2 + 1)(z - 2i)^2} dz &= 2\pi i \left[-\frac{\operatorname{senh} 2}{18} + \frac{4 \operatorname{senh} 1 - 3 \cosh 1}{9} \right] \\ &= \pi i \frac{8 \operatorname{senh} 1 - \operatorname{senh} 2 - 6 \cosh 1}{9}.\end{aligned}$$

Esercizio 4

Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva di equazione polare $\rho = \operatorname{sen}(2\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$.

Svolgimento

La regione di cui si deve calcolare l'area è quella racchiusa dalla curva in rosso disegnata in figura 1, ed è evidentemente un dominio di Green. Chiamiamo Ω la regione di cui dobbiamo calcolare l'area.

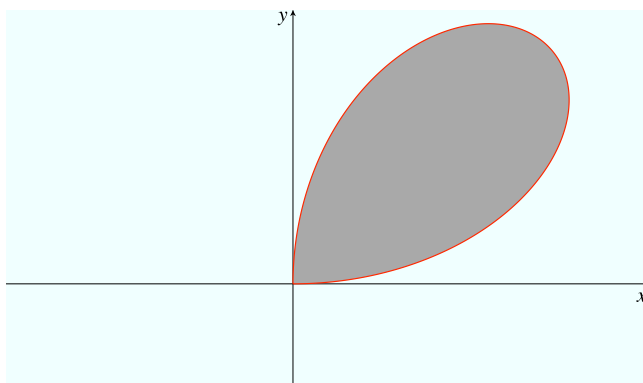


Figura 1: La curva di equazione polare $\rho = \operatorname{sen}(2\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$

Possiamo svolgere l'esercizio in tre modi

1. Facciamo un calcolo diretto operando un cambio di coordinate polari. In queste coordinate Ω è l'insieme

$$\{(\rho, \vartheta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq \operatorname{sen}(2\vartheta), \vartheta \in [0, \pi/2]\}.$$

Allora

$$\begin{aligned}|\Omega|_2 &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}(2\vartheta)} \rho d\rho d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} [1 - \cos(4\vartheta)] d\vartheta = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

2. Usiamo le formule di Gauss-Green nel piano. In coordinate cartesiane la curva γ di equazione polare $\rho = \sin(2\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin(2\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \sin(2\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}, \quad \vartheta \in [0, \pi/2],$$

e con questa parametrizzazione la curva è percorsa una volta in senso antiorario. Presi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda + \mu = 1$, si ha

$$\begin{aligned} |\Omega|_2 &= \oint_{\gamma} \lambda x dy - \mu y dx = \int_0^{\pi/2} \lambda \sin(2\vartheta) \cos \vartheta [2 \cos(2\vartheta) \sin \vartheta + \sin(2\vartheta) \cos \vartheta] d\vartheta \\ &\quad - \int_0^{\pi/2} \mu \sin(2\vartheta) \sin \vartheta [2 \cos(2\vartheta) \cos \vartheta - \sin(2\vartheta) \sin \vartheta] d\vartheta. \end{aligned}$$

Scelti $\lambda = \mu = 1/2$, si ottiene

$$|\Omega|_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sin^2(2\vartheta) \cos^2 \vartheta + \sin^2(2\vartheta) \sin^2 \vartheta] d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{8}.$$

3. In alternativa, si può ricorrere al fatto che se $\rho = f(\vartheta)$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$, è l'equazione polare di una curva chiusa semplice che è frontiera di un dominio Ω , allora l'area di Ω si esprime tramite

$$|\Omega|_2 = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [f(\vartheta)]^2 d\vartheta.$$

A tale formula si arriva procedendo come al punto 1 con un cambio di coordinate polari in cui Ω è l'insieme

$$\{(\rho, \vartheta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq f(\vartheta), \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}.$$

Allora

$$|\Omega|_2 = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_0^{f(\vartheta)} \rho d\rho d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [f(\vartheta)]^2 d\vartheta,$$

come si voleva.