Analisi Matematica 2 - a.a. 2009/2010

Terzo appello

Esercizio 1

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cosh(1/z)}{z-1}\,.$$

1. Classificare le singolarità di f.
2. Calcolare l'integrale di variabile complessa

$$\int_{C_2(0)} f(z)\,dz\,,$$

dove $C_2(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento

1. La funzione f ha singolarità isolate in $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. In $z_1 = 1$ la funzione ha un polo del primo ordine: infatti vale

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\cosh(1/z) = \cosh 1 = \mathrm{res}(f,1)\,.$$

Invece, la singolarità in $z_0 = 0$ è essenziale. Infatti, prendendo la restrizione di f all'asse immaginario, $y \mapsto f(iy)$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, si ha

$$\lim_{y\to 0} f(iy) = \lim_{y\to 0^-}\frac{1}{iy-1}\cosh(-i/y) = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{iy-1}\cos(1/y)\,,$$

che non esiste.

2. Le singolarità di f sono entrambe interne alla circonferenza $C_2(0)$. Grazie al teorema dei residui si ha

$$\int_{C_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i\big[\,\mathrm{res}(f,0) + \mathrm{res}(f,1)\big]\,.$$

Abbiamo già calcolato il $\mathrm{res}(f,1) = \cosh 1$, concentriamoci sul $\mathrm{res}(f,0)$. Essendo $z_0 = 0$ una singolarità essenziale, procuriamoci lo sviluppo di Laurent di f centrato in z_0 e ricaviamo il coefficiente di z^{-1}. Poiché

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\,, \qquad \cosh(1/z) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p)!}\cdot\frac{1}{z^{2p}}\,,$$

si ha

$$f(z) = -\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p)!}\cdot\frac{1}{z^{2p}}\right) = -\sum_{p,k\geq 0}\frac{1}{(2p)!}z^{k-2p}\,.$$

Allora

$$\mathrm{res}(f,0) = -\sum_{\substack{k,p\geq 0\\ k-2p=-1}}\frac{1}{(2p)!} = -\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)!} = 1-\cosh 1\,,$$

e quindi si ottiene

$$\int_{C_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i\,.$$

Esercizio 2

Sia data la forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x,y,z) = 2xe^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dx + 2ye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dy - e^{-y^2-z^2}\,dz\,.$$

1. Dopo aver verificato che ω non è chiusa, se ne calcoli un fattore integrante λ (Sugg.: si cerchi λ come funzione della sola variabile x).
2. Detta $\widetilde{\omega} = \lambda\omega$, si provi che $\widetilde{\omega}$ è esatta e che ha una primitiva $\widetilde{U} = \widetilde{U}(x,y,z)$ tale che $\widetilde{U}(0,0,1) = 2$.
3. Provare che l'equazione $\widetilde{U}(x,y,z) = 2$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,0,1)$ una funzione $z = g(x,y)$.
4. Provare che g ha in $(0,0)$ un punto critico e studiarne la natura.

Svolgimento

1. Si osservi innanzitutto che ω è una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^\infty$. Poiché

$$\partial_z\left[2xe^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\right] = 2xe^{-y^2-z^2} \neq 0 = \partial_x\big[-e^{-y^2-z^2}\big]\,,$$

ω non è chiusa. Cerchiamo $\lambda = \lambda(x)$ derivabile per cui

$$\widetilde{\omega} = \lambda\omega = \lambda(x)2xe^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dx + \lambda(x)2ye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dy - \lambda(x)e^{-y^2-z^2}\,dz$$

sia chiusa. Deve essere

$$\begin{cases} \partial_z\left[\lambda(x)2xe^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\right] = \partial_x\big[-\lambda(x)e^{-y^2-z^2}\big]\,, \\ \partial_y\left[\lambda(x)2xe^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\right] = \partial_x\left[\lambda(x)2ye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\right]\,, \\ \partial_z\left[\lambda(x)2ye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\right] = \partial_y\big[-\lambda(x)e^{-y^2-z^2}\big]\,, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \lambda(x)2xe^{-y^2-z^2} = -\lambda'(x)e^{-y^2-z^2}\,, \\ -\lambda(x)4xye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right) = \lambda'(x)2ye^{-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)\,, \\ \lambda(x)2ye^{-y^2-z^2} = \lambda(x)2ye^{-y^2-z^2}\,. \end{cases}$$

Allora deve essere $\lambda'(x) = -2x\lambda(x)$, da cui si ottiene che $\lambda(x) = e^{-x^2}$ è un fattore integrante.

2. Poiché $\lambda(x) = e^{-x^2}$ è un fattore integrante, la forma differenziale in $\mathbb{R}^3$
$$\widetilde{\omega} = 2xe^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dx + 2ye^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right)dy - e^{-x^2-y^2-z^2}\,dz$$
è di classe $\mathcal{C}^\infty$, chiusa e quindi esatta essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso. Detta $U = U(x,y,z)$ una sua primitiva, si ha che
$$\widetilde{U}(x,y,z) = U(x,y,z) + 2 - U(0,0,1)$$
è la primitiva di $\widetilde{\omega}$ che vale 2 in $(0,0,1)$.

3. Poiché $\widetilde{U}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo tale $\widetilde{\omega}$, e vale
$$\partial_z\widetilde{U}(x,y,z) = -e^{-x^2-y^2-z^2}\,,$$
si ha $\partial_z\widetilde{U}(0,0,1) = -1/e \neq 0$, da cui si deduce l'esistenza della funzione g grazie al teorema di Dini.

4. La funzione g è di classe $\mathcal{C}^\infty$ essendo tale $\widetilde{U}$. Inoltre il teorema di Dini implica che
$$\partial_x g(x,y) = -\frac{\partial_x\widetilde{U}(x,y,g(x,y))}{\partial_z\widetilde{U}(x,y,g(x,y))}\,,\qquad \partial_y g(x,y) = -\frac{\partial_y\widetilde{U}(x,y,g(x,y))}{\partial_z\widetilde{U}(x,y,g(x,y))}\,. \tag{1}$$
Da (1) si ottiene
$$\partial_x g(0,0) = -\frac{\partial_x\widetilde{U}(0,0,1)}{\partial_z\widetilde{U}(0,0,1)} = e\,\partial_x\widetilde{U}(0,0,1)\,,\qquad \partial_y g(0,0) = -\frac{\partial_y\widetilde{U}(0,0,1)}{\partial_z\widetilde{U}(0,0,1)} = e\,\partial_y\widetilde{U}(0,0,1)\,,$$
Essendo
$$\partial_x\widetilde{U}(x,y,z) = 2xe^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right),\qquad \partial_y\widetilde{U}(x,y,z) = 2ye^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right), \tag{2}$$
si ha $\partial_x\widetilde{U}(0,0,1) = \partial_y\widetilde{U}(0,0,1) = 0$, da cui $\partial_x g(0,0) = \partial_y g(0,0) = 0$, come si voleva. Per studiare la natura di $(0,0)$ come punto critico di g, calcoliamo la matrice hessiana di g in tale punto. Da (1) e tenuto conto del fatto che $\partial_x\widetilde{U}(0,0,1) = \partial_y\widetilde{U}(0,0,1) = 0$, si ricava
$$\partial^2_{xx}g(0,0) = -\frac{\partial^2_{xx}\widetilde{U}(0,0,1)}{\partial_z\widetilde{U}(0,0,1)}\,,\quad \partial^2_{yy}g(0,0) = -\frac{\partial^2_{yy}\widetilde{U}(0,0,1)}{\partial_z\widetilde{U}(0,0,1)}\,,\quad \partial^2_{xy}g(0,0) = -\frac{\partial^2_{xy}\widetilde{U}(0,0,1)}{\partial_z\widetilde{U}(0,0,1)}\,,$$
dove non abbiamo calcolato $\partial^2_{yx}g$ perché per il teorema di Schwarz le derivate seconde miste non dipendono dall'ordine di derivazione. Usando (2) si ottiene
$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx}\widetilde{U}(x,y,z) &= 2(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right),\\
\partial^2_{yy}\widetilde{U}(x,y,z) &= 2(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right),\\
\partial^2_{xy}\widetilde{U}(x,y,z) &= -4xye^{-x^2-y^2}\left(\int_0^z e^{-t^2}\,dt\right),
\end{aligned}$$
ed ancora grazie al teorema di Schwarz $\partial^2_{xy}\widetilde{U} = \partial^2_{yx}\widetilde{U}$. Si ricava che
$$\partial^2_{xx}\widetilde{U}(0,0,1) = 2\int_0^1 e^{-t^2}\,dt\,,\qquad \partial^2_{yy}\widetilde{U}(0,0,1) = 2\int_0^1 e^{-t^2}\,dt\,,$$

e che $\partial^2_{xy}\widetilde{U}(0,0,1) = 0 = \partial^2_{yx}\widetilde{U}(0,0,1)$. La matrice hessiana di g in $(0,0)$ è

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt & 0 \\ 0 & 2\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt \end{pmatrix}$$

che è matrice definita positiva. Se ne deduce che in $(0,0)$ la funzione g ha un punto di minimo.

Esercizio 3

Si calcoli il volume del solido

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9\left(\sqrt{x^2+z^2}-1\right)^2 + 4y^2 \leq 1\right\}.$$

Svolgimento

L'esercizio si può svolgere con due metodi diversi, usando il teorema di Pappo e con un calcolo esplicito.

Primo metodo
Si osservi che il solido S è ottenuto tramite una rotazione di un angolo $\alpha = 2\pi$ attorno all'asse y dell'insieme Ω contenuto nel piano xy il cui bordo è l'ellisse di equazione

$$9(x-1)^2 + 4y^2 = 1.$$

Tale ellisse ha centro nel punto $(1,0)$ e i suoi semiassi misurano $1/3$ e $1/2$. Ne consegue che

1. Ω è interamente contenuto nel semipiano xy con $x > 0$;
2. l'area di Ω è $|\Omega|_2 = \pi \cdot (1/3) \cdot (1/2) = \pi/6$;
3. il baricentro (centroide) di Ω è $(x_B, y_B) = (1,0)$, per evidenti ragioni di simmetria.

Allora il teorema di Pappo ci consente di concludere che

$$|S|_3 = (2\pi) \cdot |\Omega|_2 \cdot x_B = \frac{\pi^2}{3}.$$

Secondo metodo
Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta\,, \\ y = y\,, \\ z = \rho \operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,, \vartheta \in [0,2\pi[\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

il solido S è descritto da

$$\widetilde{S} = \left\{(\rho,\vartheta,y) : 9(\rho-1)^2 + 4y^2 \leq 1\,, \rho \geq 0\,, \vartheta \in [0,2\pi[\,, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

La matrice jacobiana della trasformazione è

$$J(\rho,\vartheta,y) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi vale $\det J(\rho,\vartheta,y)=\rho$. Ne consegue che

$$|S|_3=\iiint_S dxdydz=\iiint_{\widetilde{S}}\rho\,d\rho d\vartheta dy=\int_0^{2\pi}\iint_D \rho\,d\rho dy=2\pi\iint_D\rho\,d\rho dy\,,$$

dove

$$D=\left\{(\rho,y)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}:9(\rho-1)^2+4y^2\le 1\right\}.$$

Osserviamo che D è un'ellisse nel piano (ρ,y) centrata in $(1,0)$ e semiassi di lunghezza $1/3$ e $1/2$. In particolare D è dominio normale rispetto all'asse ρ ed è descritto da

$$D=\left\{(\rho,y)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}:y\in[-1/2,1/2]\,,1-\sqrt{1-4y^2}/3\le\rho\le 1+\sqrt{1-4y^2}/3\right\}.$$

Sfruttando tali considerazioni ed osservando che l'area di D nel piano (ρ,y) è $|D|_{(\rho,y)}=\pi/6$, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_D\rho\,d\rho dy&=\iint_D(\rho-1)\,d\rho dy+\iint_D d\rho dy=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{1-\sqrt{1-4y^2}/3}^{1+\sqrt{1-4y^2}/3}(\rho-1)\,d\rho dy+|D|_{(\rho,y)}\\&=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{1-\sqrt{1-4y^2}/3}^{1+\sqrt{1-4y^2}/3}(\rho-1)\,d\rho dy+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}(\rho-1)^2\Big|_{1-\sqrt{1-4y^2}/3}^{1+\sqrt{1-4y^2}/3}+\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Allora $|S|_3=\pi^2/3$.

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases}y''+4y'+4=\dfrac{e^{-2t}}{t^2}\\ y(1/2)=1/e\,,\quad y'(1/2)=0\,.\end{cases}\tag{$*$}$$

1. Si dimostri che la soluzione di $(*)$ esiste unica, definita nell'intervallo $]0,+\infty[$.
2. Si calcoli la soluzione di $(*)$.

Svolgimento

1. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti e quindi la soluzione del problema di Cauchy esiste unica nell'intervallo massimale contenente $1/2$ dove è definita la funzione $t\mapsto e^{-2t}/t^2-4$, e quindi $]0,+\infty[$.
2. Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione

$$y''+4y'=\frac{e^{-2t}}{t^2}-4\,.\tag{3}$$

Esso è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare di (3). Una volta osservato che l'equazione caratteristica $\lambda^2+4\lambda=0$ ha per soluzioni $\lambda_1=-4$ e $\lambda_2=0$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata si scrive

$$\widetilde{y}(t)=A+Be^{-4t}\,,\tag{4}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Per calcolare una soluzione particolare $\overline{y} = \overline{y}(t)$, ricorriamo al metodo di variazione delle costanti, cosicché

$$\overline{y}(t) = \int_1^t \eta(t-s) \left(\frac{e^{-2s}}{s^2} - 4 \right) ds\,,$$

dove η risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' = 0 \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Imponendo in (4) le condizioni $\widetilde{y}(0) = 0$ e $\widetilde{y}'(0) = 1$, si trova $A = 1/4$ e $B = -1/4$, e quindi

$$\eta(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} \overline{y}(t) &= \frac{1}{4} \int_{1/2}^t \left[1 - e^{-4(t-s)} \right] \left(\frac{e^{-2s}}{s^2} - 4 \right) ds \\ &= \int_{1/2}^t \left[e^{-4(t-s)} - 1 \right] ds + \frac{1}{4} \int_{1/2}^t \frac{e^{-2s} - e^{-4t} e^{2s}}{s^2}\, ds \\ &= \frac{1 - e^{2-4t}}{4} - t + 1/2 + \frac{1}{4} \int_{1/2}^t \frac{e^{-2s} - e^{-4t} e^{2s}}{s^2}\, ds\,, \end{aligned}$$

e si osservi che $\overline{y}(1/2) = \overline{y}'(t)(1/2) = 0$. L'integrale generale di (3) è

$$y(t) = \widetilde{y}(t) + \overline{y}(t) = A + Be^{-4t} + \frac{1 - e^{2-4t}}{4} - t + 1/2 + \frac{1}{4} \int_{1/2}^t \frac{e^{-2s} - e^{-4t} e^{2s}}{s^2}\, ds\,.$$

Per risolvere il problema di Cauchy imponiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$y(1/2) = \widetilde{y}(1/2) + \overline{y}(1/2) = A + \frac{B}{e^2}\,,$$

ed inoltre

$$y'(t) = \widetilde{y}'(t) + \overline{y}'(t) = -4Be^{-4t} + \overline{y}'(t)\,,$$

da cui

$$y'(1/2) = -\frac{4B}{e^2} + \overline{y}'(1/2) = -\frac{4B}{e^2}\,.$$

Si ottiene che deve essere

$$\begin{cases} A + \dfrac{B}{e^2} = \dfrac{1}{e} \\ -\dfrac{4B}{e^2} = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1/e \\ B = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy $(*)$ è allora

$$y(t) = \frac{1}{e} + \frac{1 - e^{2-4t}}{4} - t + 1/2 + \frac{1}{4} \int_{1/2}^t \frac{e^{-2s} - e^{-4t} e^{2s}}{s^2}\, ds\,.$$