Analisi Matematica 2 - a.a. 2009/2010

Quarto appello

Esercizio 1

Sia $\Gamma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\,,\ y^2+(z-2)^2 = 1\big\}$.

1. Provare che tutti i punti di Γ sono regolari.
2. Determinare lo spazio tangente a Γ nel punto $(\sqrt{3},1,2)$.
3. Provare che Γ è un insieme compatto.
4. Data la funzione $f(x,y,z) = e^x$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dimostrare che ammette massimo e minimo vincolati a Γ e calcolarne il valore usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Svolgimento

1. Posto $\varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ e $\varphi_2(x,y,z) = y^2+(z-2)^2$, i punti di Γ sono tutti e soli gli elementi di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano
$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z) = 0\\ \varphi_2(x,y,z) = 1\,.\end{cases}$$
Per verificare che sono tutti regolari, dobbiamo provare che la matrice
$$\begin{pmatrix}\nabla\varphi_1(x,y,z)\\ \nabla\varphi_2(x,y,z)\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x & y & -z\\ 0 & y & z-2\end{pmatrix}$$
ha rango 2 per ogni $(x,y,z) \in \Gamma$, cioè che il sistema
$$\begin{cases}xy = 0\\ x(z-2) = 0\\ 2y(z-1) = 0\\ x^2+y^2-z^2 = 0\\ y^2+(z-2)^2 = 1\end{cases}$$
non ha soluzioni. Se $x = 0$, la prima e la seconda equazione sono verificate. Riguardo alla terza, se $y = 0$, dalla quarta si ricava $z = 0$ e quindi l'ultima equazione non è soddisfatta. Se invece $z = 1$, dalla quarta si ottiene $y^2 = 1$ e quindi ancora l'ultima equazione non è soddisfatta. Ripartiamo dalla prima: posto $y = 0$ e $x \neq 0$, dalla seconda si ricava $z = 2$, e di nuovo la quinta equazione non è soddisfatta, da cui la conclusione che il sistema non ha soluzioni, come si voleva.

2. Lo spazio tangente a Γ in $(\sqrt{3},1,2)$ è dato da
$$T_\Gamma(\sqrt{3},1,2) = \big[\mathrm{span}\big\{\nabla\varphi_1(\sqrt{3},1,2), \nabla\varphi_2(\sqrt{3},1,2)\big\}\big]^\perp = \big[\mathrm{span}\big\{(\sqrt{3},1,-2),(0,1,0)\big\}\big]^\perp\,,$$
e quindi $(x,y,z) \in T_\Gamma(\sqrt{3},1,2)$ se e solo se
$$\begin{cases}\sqrt{3}x+y-2z = 0\\ y = 0\,,\end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases}z = x\sqrt{3}/2\\ y = 0\,,\end{cases}$$
da cui si ricava che $T_\Gamma(\sqrt{3},1,2) = \mathrm{span}\{(2,0,\sqrt{3})\}$.

3. Γ è chiuso perché φ_1, φ_2 sono continue e Γ è l'intersezione delle superfici di livello $\varphi_1(x,y,z) = 0$ e $\varphi_1(x,y,z) = 1$. Inoltre è limitato, e quindi compatto. Infatti, da $\varphi_2(x,y,z) = 1$ si ricava che deve essere $|y| \leq 1$ e $1 \leq z \leq 3$, e quindi da $\varphi_1(x,y,z) = 0$ si ottiene $|x| \leq 3$, da cui la limitatezza.

4. La funzione f è continua, Γ compatto, e quindi il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo e minimo di f vincolati a Γ. Per trovarli, cerchiamo i punti critici vincolati di f. La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = e^x - \lambda(x^2 + y^2 - z^2) - \mu\big[y^2 + (z-2)^2 - 1\big] .$$

I suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^x - 2\lambda x = 0 \\ -2\lambda y - 2\mu y = 0 \\ 2\lambda z - 2\mu(z-2) = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y^2 + (z-2)^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} e^x - 2\lambda x = 0 \\ y(\lambda + \mu) = 0 \\ z(\lambda - \mu) + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y^2 + (z-2)^2 = 1 \end{cases}$$

Partiamo dalla seconda equazione. Con $y = 0$ l'ultima equazione fornisce $z = 1$ o $z = 3$. Sostituendo $y = 0$ e $z = 1$ nella quarta equazione, si trova $x = \pm 1$, successivamente la prima e la terza equazione forniscono i valori di λ e μ. Ne consegue che $(-1,0,1)$ e $1,0,1)$ sono punti critici vincolati per f. Ponendo $y = 0$ e $z = 3$ nella quarta equazione, si trova $x = \pm 3$, e poi di nuovo la prima e la terza equazione forniscono i valori di λ e μ. Se ne deduce che anche $(-3,0,3)$ e $(3,0,3)$ sono punti critici vincolati per f. Se nella seconda equazione si pone $\lambda = -\mu$, la terza fornisce $2\mu(1-z) = 0$. Se fosse $\mu = 0$, si otterrebbe $\lambda = 0$ e quindi la prima equazione si rideurrebbe a $e^x = 0$, che non ha soluzioni. Se invece vale $z = 1$, l'ultima equazione fornisce $y = 0$ e quindi, procedendo come prima, si trovano di nuovo i punti critici vincolati $(-1,0,1)$ e $(1,0,1)$. Calcolando f nei punti critici vincolati si trova

$$f(-1,0,1) = 1/e\,, \quad f(1,0,1) = e\,, \quad f(-3,0,3) = 1/e^3\,, \quad f(3,0,3) = e^3\,,$$

da cui si deduce che il massimo di f vincolato a Γ è e^3, mentre il minimo è $1/e^3$.

Esercizio 2

Sia Σ la superficie ottenuta per rotazione completa attorno all'asse z della curva contenuta nel piano xz di equazioni parametriche

$$x = \frac{\cos\vartheta}{1 + \operatorname{sen}\vartheta}\,, \qquad z = 1 + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{1 + \operatorname{sen}\vartheta} \qquad \vartheta \in [0, \pi/2]\,. \tag{1}$$

1. Calcolare l'area di Σ.

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

attraverso Σ orientata in modo che nel punto $(0,0,3/2)$ il versore normale sia $\mathbf{k}$.

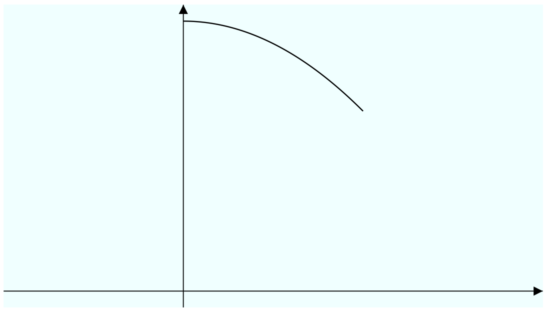

Figura 1: La curva di equazioni parametriche (1)

Svolgimento

1. La curva γ di equazioni parametriche (1),

$$\gamma(\vartheta) = \big(x(\vartheta), z(\vartheta)\big) = \left(\frac{\cos\vartheta}{1+\operatorname{sen}\vartheta}, 1 + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{1+\operatorname{sen}\vartheta}\right) \qquad \vartheta \in [0, \pi/2]\,,$$

è rappresentata in figura 1 (l'asse z è quello verticale). La superficie Σ ottenuta da una rotazione completa attorno all'asse z del supporto di Γ è rappresentata in figura 2. Sfruttando

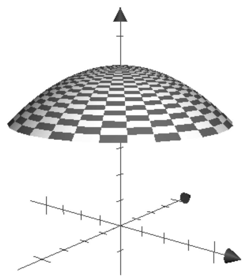

Figura 2: La superficie Σ

il teorema di Guldino si ottiene che l'area di Σ è

$$|\Sigma| = 2\pi \int_\gamma x\, ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\vartheta}{1+\operatorname{sen}\vartheta} \|\gamma'(\vartheta)\|\, d\vartheta\,.$$

Poiché

$$\|\gamma'(\vartheta)\| = \sqrt{[x'(\vartheta)]^2 + [z'(\vartheta)]^2} = \sqrt{\frac{1}{(1+\operatorname{sen}\vartheta)^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{(1+\operatorname{sen}\vartheta)^4}} = \frac{\sqrt{2+2\operatorname{sen}\vartheta}}{(1+\operatorname{sen}\vartheta)^2}$$
$$= \sqrt{2}(1+\operatorname{sen}\vartheta)^{-3/2}\,,$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
|\Sigma| &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta(1+\operatorname{sen}\vartheta)^{-5/2}\, d\vartheta = \frac{2\sqrt{2}\pi}{1-5/2}(1+\operatorname{sen}\vartheta)^{1-5/2}\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi(1-2^{-3/2}) = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-2)\,.
\end{aligned}
$$

2. Si osservi che $\operatorname{div}\mathbf{F} \equiv 0$. Consideriamo allora l'insieme Ω contenuto tra Σ e il cerchio C di centro $(0,0,1)$ e raggio 1 contenuto nel piano $z=1$,

$$
C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\,, x^2+y^2 \le 1\right\}.
$$

Allora Ω è un dominio di Green la cui frontiera è l'unione di Σ con il cerchio C. Orientando questo in modo che la sua normale sia $-\mathbf{k}$, si ottiene che

$$
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) + \Phi_C(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = 0\,,
$$

da cui, passando in coordinate polari,

$$
\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = -\Phi_C(\mathbf{F}) &= \iint_{B_1(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(1+\rho^2)^{-3/2}\, d\rho d\vartheta \\
&= -2\pi(1+\rho^2)^{-1/2}\Big|_0^1 = 2\pi(1-2^{-1/2}) = \pi(2-\sqrt{2})\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Sia data l'equazione differenziale esatta

$$
y' = -\frac{e^x}{2y(e^x+y^2)}\,. \tag{2}
$$

1. Provare che un problema di Cauchy per (2) ha un'unica soluzione.

2. Si calcolino le soluzioni di (2) in forma implicita.

3. Provare che un problema di Cauchy per (2) ha soluzione massimale limitata.

4. Si consideri un problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = y_0 > 0$. Provare che la soluzione massimale verifica

$$
y'(x) \le y'(0) = -\frac{1}{2y_0(1+y_0^2)}
$$

per ogni $x > 0$ nel suo intervallo di esistenza. Dedurre che tale soluzione massimale non è definita in tutta la semiretta $[0,+\infty[$. Ciò è in contrasto con quanto provato al punto 3?

Svolgimento

1. Poiché la funzione

$$
f(x,y) = -\frac{e^x}{2y(e^x+y^2)} \qquad y \ne 0\,, \tag{3}
$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty$, essa è localmente lipschitziana in entrambe le variabili x e y, e quindi per il teorema di Cauchy-Lipschitz un problema di Cauchy per (2) ha un'unica soluzione.

2. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = e^x \, dx + 2y(e^x + y^2) \, dy \, .$$

Essa è definita su $\mathbb{R}^2$, ma non è chiusa, come si verifica facilmente. Cerchiamone un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$, e quindi consideriamo la forma $\widetilde{\omega} = \lambda\omega$. Affinché sia chiusa deve essere

$$e^x \partial_y \lambda = 2ye^x \lambda + 2y(e^x + y^2)\partial_x \lambda \, .$$

Posto $\partial_x \lambda = 0$, si ottiene che deve essere $\partial_y \lambda = 2y\lambda$, che ha $\lambda(x, y) = e^{y^2}$ come soluzione. Allora la forma differenziale

$$\widetilde{\omega} = \lambda\omega = e^{x+y^2} \, dx + 2ye^{y^2}(e^x + y^2) \, dy$$

è esatta essendo chiusa e definita su $\mathbb{R}^2$, insieme semplicemente connesso. Un suo potenziale $U = U(x, y)$ soddisfa

$$\partial_x U = e^{x+y^2} \, , \qquad \partial_y U = 2ye^{y^2}(e^x + y^2) \, .$$

Dalla prima equazione facilmente si ricava che vale

$$U(x, y) = e^{x+y^2} + \psi(y) \, .$$

Per trovare ψ sfruttiamo la seconda equazione. Deve essere

$$2ye^{x+y^2} + \psi'(y) = 2ye^{y^2}(e^x + y^2) \, ,$$

da cui $\psi'(y) = 2y^3 e^{y^2}$. Essendo

$$\int 2y^3 e^{y^2} \, dy = y^2 e^{y^2} - \int 2ye^{y^2} \, dy = e^{y^2}(y^2 - 1) + c \, ,$$

si può prendere $\psi(y) = e^{y^2}(y^2 - 1)$, e quindi

$$U(x, y) = e^{x+y^2} + e^{y^2}(y^2 - 1) = e^{y^2}(e^x + y^2 - 1) \, .$$

Poiché U è costante lungo le soluzioni di (2), deve valere

$$e^{y^2(x)}(e^x + y^2(x) - 1) = \text{cost} \, , \tag{4}$$

dove $y = y(x)$ è soluzione di (2).

3. Se una soluzione $y = y(x)$ di (2) fosse illimitata, tale sarebbe anche la quantità $e^{y^2(x)}(e^x + y^2(x) - 1)$, il che è assurdo perché per (4) tale quantità è costante.

4. Una soluzione $y = y(x)$ di (2) è di classe $\mathcal{C}^\infty$, essendo tale la funzione f in (3). Calcoliamo $y''(x)$: sfruttando (2) si ottiene

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{e^x}{2} \frac{y(e^x + y^2) - y'(e^x + y^2) - y(e^x + 2yy')}{y^2(e^x + y^2)^2} \\ &= -\frac{e^x}{2y^2(e^x + y^2)^2} \left[y(e^x + y^2) + \frac{e^x}{2y} - ye^x + y\frac{e^x}{e^x + y^2} \right] \\ &= -\frac{e^x}{2y^2(e^x + y^2)^2} \left[y^3 + \frac{e^x}{2y} + y\frac{e^x}{e^x + y^2} \right] \, . \end{aligned}$$

Poiché se $y(0) = y_0 > 0$ vale $y(x) > 0$ per ogni x nell'intervallo $\mathcal{I}$ di esistenza della soluzione, essendo f in (3) definita per $y \neq 0$, si ottiene che $y''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{I}$. Allora y' è funzione decrescente e quindi vale

$$y'(x) \leq y'(0) = -\frac{1}{2y_0(1+y_0^2)} \qquad \forall\, x > 0\,, x \in \mathcal{I}\,,$$

come si voleva. Da questo si deduce che

$$y(x) = y_0 + \int_0^x y'(s)\,ds \leq y_0 + y'(0)x = y_0 - \frac{x}{2y_0(1+y_0^2)}\,.$$

Se la soluzione fosse definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$, si otterrebbe che $y(x) \leq 0$ per

$$x \geq 2y_0^2(1+y_0^2)\,,$$

contro il fatto che deve valere $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{I}$. Ciò non è in contrasto con la limitatezza della soluzione y, perché f non è definita per $y = 0$.

Esercizio 4

Si studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Svolgimento

La funzione è banalmente differenziabile per $(x,y) \neq (0,0)$ perché rapporto di funzioni differenziabili con denominatore non nullo. Resta da indagare cosa succede in $(0,0)$. Innanzitutto osserviamo che, essendo

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,,$$

si ha

$$|f(x,y)| = |x| \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |\operatorname{sen} y| \leq |x \operatorname{sen} y| \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,,$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

per il teorema dei due carabinieri, e quindi la continuità di f nell'origine. Riguardo alla derivabilità, si osservi che $f(x,0) = f(0,y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, e quindi f è derivabile in $(0,0)$ e vale $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Per studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$ calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)x - \partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Poiché

$$\left|\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| = \frac{(|x|^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{3/2} \leq 1 \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,,$$

si ha

$$\left|\frac{x^3 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| \leq |\operatorname{sen} y| \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0)\,,$$

e quindi per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen} y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\,,$$

da cui la differenziabilità di f in $(0,0)$.