Convergenza di successioni di funzioni

Consideriamo la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}\,.$$

Il limite puntuale si calcola facilmente e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn} x\,.$$

Si noti che la successione non converge uniformemente essendo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \operatorname{sgn} x| = \lim_{x\to 0} |f_n(x) - \operatorname{sgn} x| = 1\,.$$

Nelle figure 1–4 sono riportati i grafici di alcuni elementi della successione. Il grafico della funzione sgn è disegnato in nero, mentre in rosso è disegnato il grafico della funzione errore

$$E_n^f(x) \doteq |f_n(x) - \operatorname{sgn} x|\,,$$

che misura la distanza di $f_n(x)$ da $\operatorname{sgn} x$.

Consideriamo ora la successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\,.$$

Il limite puntuale è

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = |x|\,,$$

e poiché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|g_n(x) - |x|\big| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+1/n^2}+|x|}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per} \quad n\to+\infty\,,$$

la successione converge uniformemente. Nelle figure 5–7 sono riportati i grafici di alcuni elementi della successione. Il grafico della funzione $x\mapsto |x|$ è disegnato in nero, mentre, come nel caso precedente, in rosso è disegnato il grafico della funzione errore

$$E_n^g(x) \doteq \big|g_n(x) - |x|\big|\,.$$

Si confrontino i grafici di E_n^f alle figure 1–4 e di E_n^g alle figure 5–7: è evidente il diverso comportamento che sottolinea la differenza tra una successione che converge solo puntualmente e una che converge uniformemente.

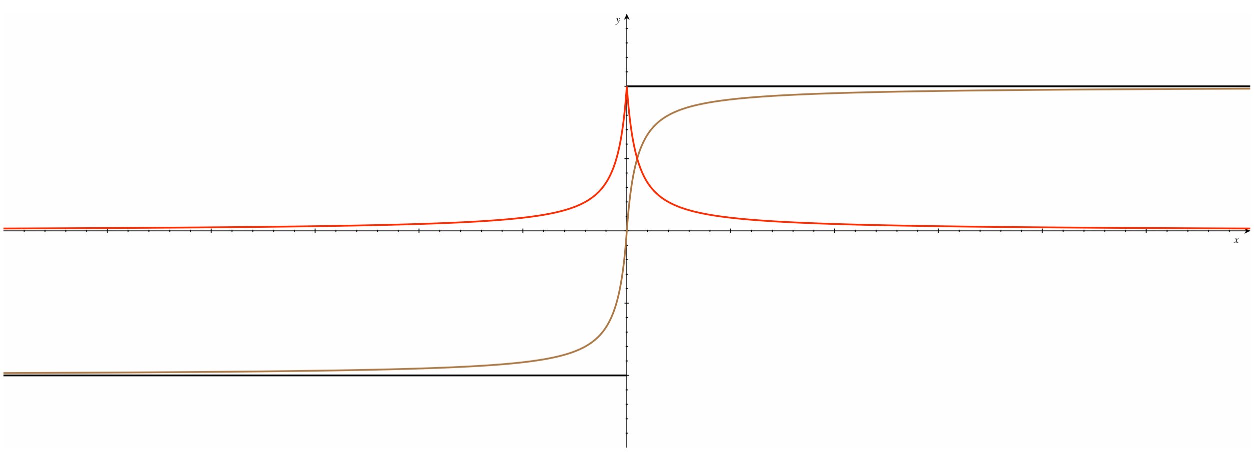

Figura 1: $f_{40}(x) = \dfrac{40x}{1+|40x|}$

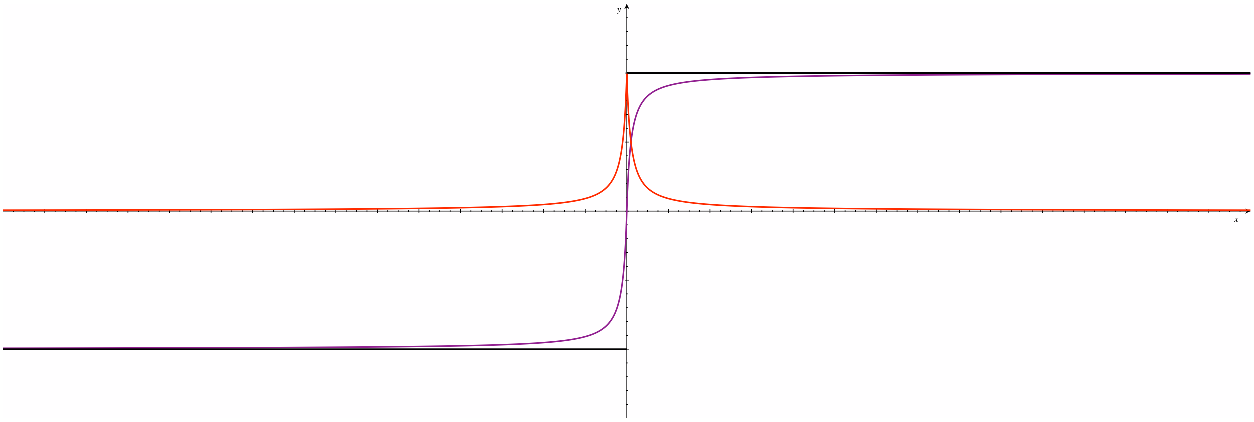

Figura 2: $f_{100}(x) = \dfrac{100x}{1 + |100x|}$

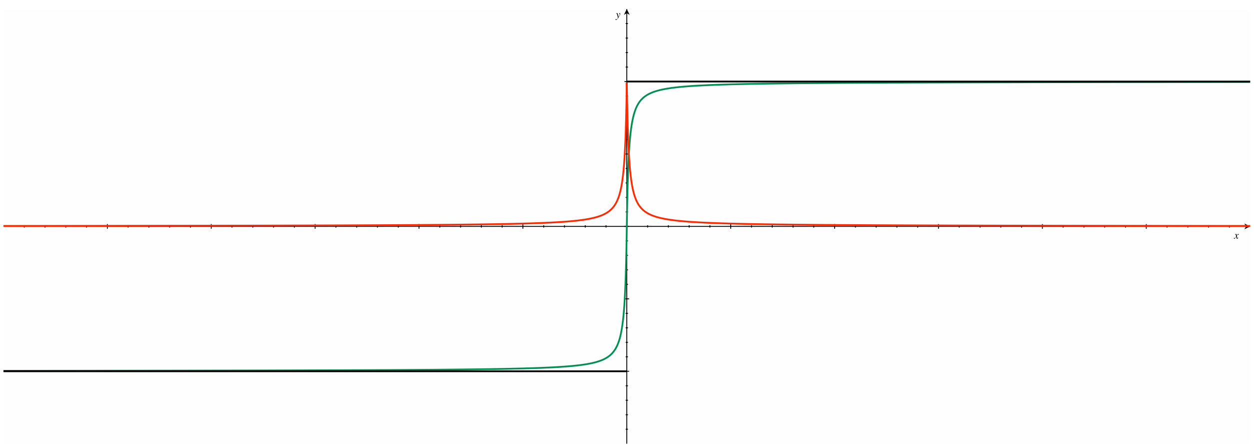

Figura 3: $f_{200}(x) = \dfrac{200x}{1 + |200x|}$

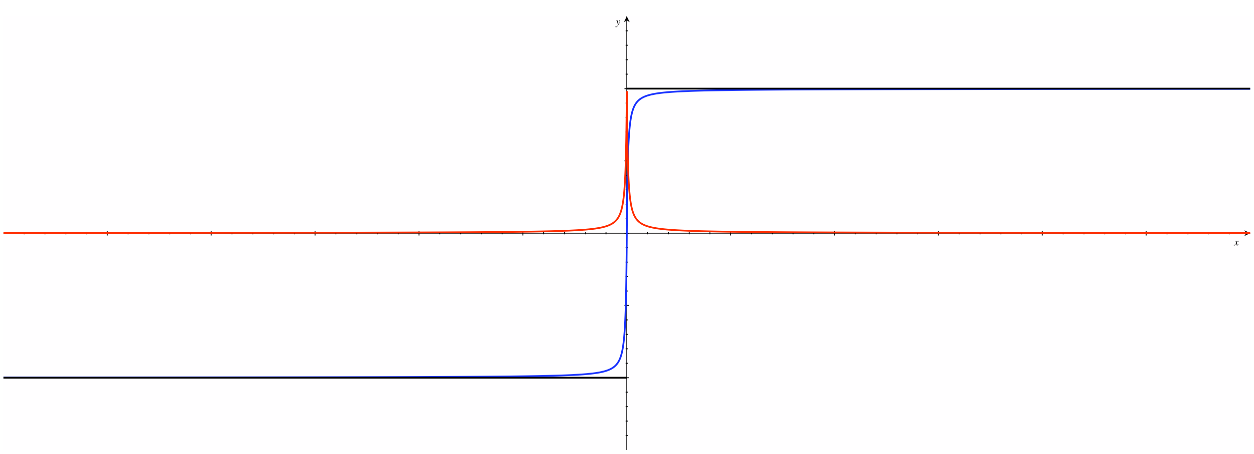

Figura 4: $f_{400}(x) = \dfrac{400x}{1 + |400x|}$

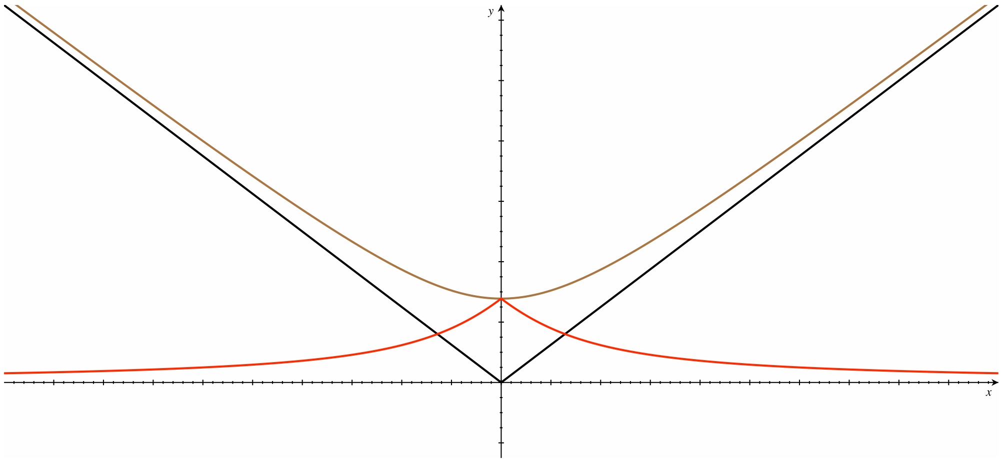

Figura 5: $g_9(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{9^2}}$

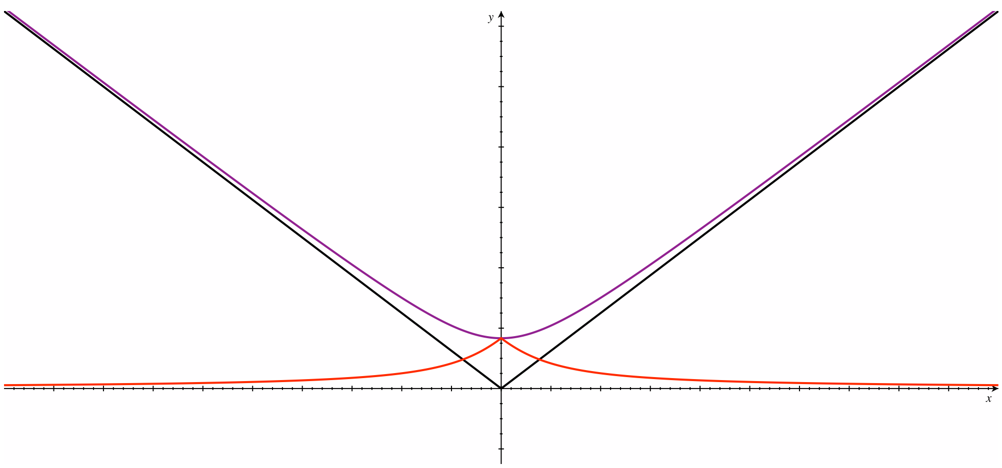

Figura 6: $g_{15}(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{15^2}}$

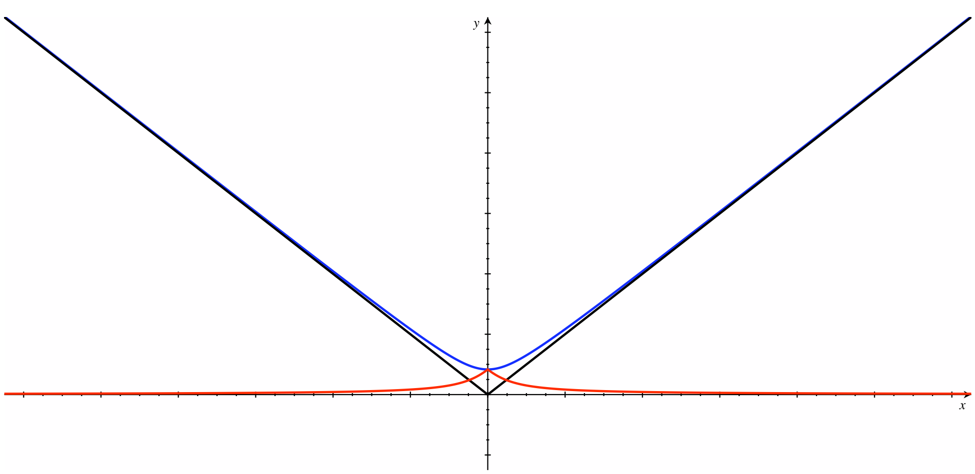

Figura 7: $g_{30}(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{30^2}}$