

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

**Andrea Marson**

**Note introduttive alle  
leggi di conservazione**

Maggio 2003



# Prefazione

Queste note contengono gli argomenti svolti dell'autore in alcune ore di lezione per il corso di Equazione Differenziali - Modulo B tenuto presso l'Università degli Studi di Padova per il Corso di Laurea in Matematica nell'anno accademico 2002/2003. Essendo "note introduttive" non vogliono essere esaustive dell'argomento, ma dare un'idea di come è nata e si è sviluppata la teoria sulle leggi di conservazione iperboliche in una variabile spaziale. Per questo, e considerato anche il pubblico a cui erano rivolte le lezioni, da una parte si è scelto di semplificare la trattazione studiando solo equazioni scalari, dall'altra si è cercato di mettere in evidenza tecniche che possono essere poi estese a sistemi di equazioni, quale il metodo di *wave front tracking*, e si sono trascurati alcuni aspetti, quale ad esempio la formula di Lax [6]. Inoltre, nelle dimostrazioni si è preferito introdurre alcune ipotesi semplificative per non appesantire troppo l'esposizione con dettagli tecnici. Per una trattazione più approfondita e completa, si rimanda ai testi di Alberto Bressan [2] e Constantine M. Dafermos [4] citati in bibliografia.

Suggerimenti e segnalazioni di errori sono benvenuti e possono essere spediti all'autore all'indirizzo di posta elettronica `marson@math.unipd.it`.

## Notazioni

In queste note useremo le seguenti notazioni:

- dati due elementi  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ , con  $\langle a, b \rangle$  indichiamo il prodotto scalare tra  $a$  e  $b$ , cioè

$$\langle a, b \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i;$$

- con  $t \in [0, +\infty[$  indicheremo sempre la variabile temporale, mentre  $x, x_1, x_2, \dots$  indicheranno sempre variabili spaziali (e dunque reali);
- data una funzione  $\varphi$  a valori reali e definita in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , indicheremo con  $\text{supp } \varphi$  il suo supporto, cioè la chiusura del complementare dell'insieme dove  $\varphi$  si annulla; inoltre, indicheremo con  $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$  l'insieme di tutte le funzioni  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  con supporto compatto;

- per indicare una derivata parziale di una funzione  $u$  rispetto ad una variabile  $y$ , useremo indifferentemente i simboli  $u_y$  oppure  $\partial_y u$ , a seconda della convenienza; per esempio  $u_t$  e  $\partial_t u$  indicano entrambe una derivata parziale prima rispetto alla variabile temporale  $t$ , mentre  $\partial_x^2 u$  indica una derivata parziale seconda fatta rispetto alla variabile  $x$ ;
- il simbolo  $Du$  sarà usato per il gradiente della funzione  $u$  fatto rispetto alle variabili spaziali; quindi, se  $u$  è funzione delle variabili  $t \geq 0$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = u(x, t)$ , si ha

$$Du(x, t) = (\partial_{x_1} u(x, t), \dots, \partial_{x_n} u(x, t));$$

Inoltre diremo che una certa proprietà  $\mathcal{P}(x)$  vale per q.o. (quasi ogni)  $x \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ , se esiste un insieme  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{I}$  di misura di Lebesgue nulla tale che  $\mathcal{P}(x)$  è vera per ogni  $x$  non appartenente a  $\mathcal{N}$ .

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>1</b>
<b>1 Equazioni di evoluzione</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione . . . . .	5
1.2 Preliminari matematici . . . . .	7
1.2.1 Funzioni BV . . . . .	10
1.3 Equazione di trasporto . . . . .	12
1.3.1 Il problema omogeneo . . . . .	12
1.3.2 Il problema non omogeneo . . . . .	14
<b>2 Leggi di conservazione scalari</b>	<b>15</b>
2.1 Introduzione . . . . .	15
2.2 Soluzioni deboli . . . . .	18
2.2.1 Le condizioni di Rankine–Hugoniot . . . . .	20
2.3 Soluzioni entropicamente ammissibili . . . . .	23
2.4 Legame con le equazioni di Hamilton–Jacobi . . . . .	34
<b>3 Un semigruppato di soluzioni</b>	<b>37</b>
3.1 Introduzione . . . . .	37
3.2 Il Problema di Riemann . . . . .	38
3.2.1 Il caso di un flusso strettamente convesso . . . . .	38
3.2.2 Il caso di un flusso affine . . . . .	40
3.3 La costruzione del semigruppato . . . . .	41



# Capitolo 1

## Equazioni di evoluzione

### 1.1 Introduzione

In queste note è esposta la teoria riguardante la legge di conservazione scalare in una variabile spaziale

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x F(u(x, t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $F$  è funzione nota. Equazioni di questo tipo compaiono in fluidodinamica quando si studiano fluidi comprimibili (equazione di conservazione della massa), o in modelli di traffico. Come introduzione a questa, ci occuperemo anche dell'equazione di trasporto

$$\partial_t u(x, t) + \langle g(x, t), Du(x, t) \rangle = f(x, t),$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Tale equazione si usa, per esempio, per descrivere il moto di un inquinante in sospensione in un altro liquido. In questo contesto,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u$  è la densità dell'inquinante,  $g(x, t)$  la velocità con cui si muove la sostanza inquinante nel punto  $x$  all'istante  $t$  e  $f$  rappresenta la produzione di inquinamento per unità di tempo nel punto  $x$ .

Una legge di conservazione è una particolare equazione alle derivate parziali di tipo evolutivo. Tali equazioni descrivono processi non stazionari, che cioè evolvono nel tempo, e quindi la variabile temporale  $t$  compare esplicitamente o implicitamente, qualora siano presenti derivate rispetto a  $t$  di una o più funzioni incognite.

Diamo alcuni esempi di fenomeni legati alla fisica e all'ingegneria descritti da equazioni o sistemi di equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo.

#### Singole equazioni

1. L'equazione del telegrafo.

Sia  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , l'intensità di un segnale elettromagnetico che si propaga lungo un cavo. Siano  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  costanti caratteristiche del cavo legate alla resistenza,

induttanza, capacità e conduttanza. Allora  $u$  obbedisce all'equazione

$$\partial_x^2 u = \alpha \partial_t^2 u + \beta \partial_t u + \gamma u.$$

2. L'atomo di idrogeno.

È l'equazione di un elettrone che si muove attorno ad un protone. Sia  $m$  la massa dell'elettrone,  $e$  la sua carica elettrica,  $h$  la costante di Planck divisa per  $2\pi$ . Il moto dell'elettrone è governato dalla "funzione d'onda"  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$  che obbedisce all'equazione di Schrödinger

$$-i\hbar \partial_t u = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \frac{e^2}{r} u,$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria,  $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$  e  $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$  è il laplaciano.

3. L'equazione di conservazione della massa

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

che compare nella fluidodinamica. In questo caso  $\rho = \rho(x, t) \in \mathbb{R}$  è la densità di fluido nel punto  $x$  all'istante  $t$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t) \in \mathbb{R}^3$  è il campo di velocità e  $\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_i \partial_{x_i} w_i$  è la divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{w}$  fatta rispetto alle variabili spaziali.

## Sistemi di equazioni

1. Le equazioni della fluidodinamica.

Il moto di un fluido incomprimibile è regolato dalle equazioni di Navier–Stokes

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot D) \mathbf{v} + \rho^{-1} Dp = \mathbf{f}_e. \end{cases}$$

Qui  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  è il campo di velocità,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  è la divergenza di  $\mathbf{v}$  fatta rispetto alle variabili spaziali,  $p \in \mathbb{R}$  è la pressione e  $\mathbf{f}_e$  sono le forze esterne agenti sul fluido.

2. Le equazioni della gas dinamica

Il comportamento di un gas è descritto dalle equazioni di Eulero, che in una variabile spaziale si scrivono

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x p = 0 \\ \partial_t \left( e + \frac{u^2}{2} \right) + \partial_x (u \cdot p) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

In questo caso  $v = v(x, t)$  è il volume specifico nel punto  $x$  all'istante  $t$ ,  $u = u(x, t)$  la velocità della particella di gas che all'istante  $t$  si trova nel punto  $x$ ,  $e$  l'energia interna e  $p = p(e, v)$  la pressione.



## 3. Modelli di traffico congestionato

Supponiamo di essere in un tratto di autostrada dove non ci siano entrate e uscite. Indichiamo con  $\rho$  la densità delle auto (es.: numero di auto per chilometro). Inoltre, sia  $q$  un parametro ausiliario legato alla velocità  $v = v(\rho, q)$  delle auto dalla relazione

$$v(\rho, q) = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_M} \right) \cdot q,$$

dove  $\rho_M$  è la massima densità consentita. Indicata inoltre con  $q_*$  una costante caratteristica della strada in considerazione, il modello si scrive

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho \cdot v) = 0 \\ \partial_t q + \partial_x[(q - q_*) \cdot v] = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

## 4. Modelli di transizione di fase.

Supponiamo di avere un materiale che occupa un aperto limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$  e che stia subendo una transizione di fase (es. liquido–solido) per mezzo di un processo di raffreddamento o riscaldamento. Le equazioni di evoluzione che descrivono il processo fisico coinvolgono la temperatura assoluta  $\vartheta = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t)$  e una variabile di fase  $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3, t)$  utile per distinguere una fase dall'altra (per esempio, può essere la percentuale di liquido presente nel materiale in considerazione). Se tutto il processo si svolge nell'intervallo temporale  $[0, T]$ , allora in  $]0, T[ \times \Omega$  devono essere soddisfatte le equazioni

$$\begin{cases} \partial_t(\vartheta + \lambda(\chi)) - \Delta \vartheta = g \\ \partial_t \chi - \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = \frac{\lambda'(\chi)}{\vartheta_c} - \frac{\lambda'(\chi)}{\vartheta}, \end{cases}$$

dove  $\Delta$  indica il laplaciano,  $\lambda, \beta, \sigma$  sono funzioni caratteristiche del materiale,  $g$  è un termine di sorgente e  $\vartheta_c$  è la temperatura critica a cui avviene la transizione di fase.

## 1.2 Preliminari matematici

In questo paragrafo enunceremo alcuni lemmi tecnici che ci saranno utili in seguito, e richiameremo le proprietà principali delle funzioni a variazione totale limitata.

**Teorema 1.1 (di Rademacher)** *Sia  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  localmente lipschitziana. Allora  $\varphi$  è differenziabile quasi ovunque.*

Per una dimostrazione del teorema di Rademacher si veda [2, Teorema 2.8].

**Lemma 1.1** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funzione lipschitziana a supporto compatto. Allora esiste una successione di funzioni  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^1(\Omega)$  tale che*

$$D\varphi_\nu \rightarrow D\varphi \quad \text{in } \mathbb{L}^1(\Omega). \quad (1.3)$$

*Inoltre, se  $\varphi \geq 0$ , la successione  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  può essere scelta in modo che  $\varphi_\nu \geq 0$  per ogni  $\nu$ .*

**Dim.** Osserviamo innanzitutto che  $D\varphi$  esiste q.o. in  $\Omega$  per il teorema di Rademacher, ed inoltre appartiene a  $\mathbb{L}^1(\Omega)$  perché appartiene ad  $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ , essendo limitati i rapporti incrementali di  $\varphi$ , e  $\varphi$  è a supporto compatto. Sia  $\Omega' \subset \Omega$  un aperto a chiusura compatta in  $\Omega$  contenente il supporto di  $\varphi$  e sia  $r$  la distanza della chiusura di  $\Omega'$  dalla frontiera di  $\Omega$ . Prolunghiamo  $\varphi$  su  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  ponendo  $\varphi(x) = 0$ . Sia  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ , non negativa, con  $\text{supp } \psi$  contenuto nella palla  $B(0; r/2)$  centrata nell'origine e di raggio  $r/2$  e tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, dx = 1.$$

Definiamo

$$\psi_\nu(x) \doteq 2^{n\nu} \psi(2^\nu x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{N}.$$

Notiamo che per ogni  $\nu$  la funzione  $\psi_\nu$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e a supporto compatto contenuto in  $B(0; 2^{-\nu-1}r)$  e che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\nu(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, dx = 1$$

Definiamo la successione  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  come

$$\varphi_\nu(x) \doteq \varphi * \psi_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \cdot \psi_\nu(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e osserviamo che, poiché

$$\text{supp } \varphi_\nu \subset \overline{\text{supp } \varphi + \text{supp } \psi_\nu},$$

il supporto di  $\varphi_\nu$  è compatto e, grazie alla scelta di  $r$ , è contenuto in  $\Omega$ . Inoltre  $\varphi_\nu$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  grazie alla regolarità di  $\psi_\nu$ , e, se  $\varphi \geq 0$ , anche  $\varphi_\nu \geq 0$ . Per le proprietà della convoluzione (si veda, per esempio [7, Capitolo 8]), si ha

$$\partial_{x_i} \varphi_\nu(x) = \partial_{x_i} \varphi * \psi_\nu(x)$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e vale

$$\partial_{x_i} \varphi_\nu \rightarrow \partial_{x_i} \varphi \quad \text{in } \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

per ogni  $i = 1, \dots, n$ , da cui (1.3). □

**Lemma 1.2** *Sia  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione convessa. Allora per ogni intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  esiste una successione  $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C^0(\mathbb{R})$  di funzioni affini a tratti che converge uniformemente a  $\eta$  in  $[a, b]$ . Inoltre, indicata con  $(a)^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , la funzione parte positiva,  $\eta_\nu$  ammette una rappresentazione del tipo*

$$\eta_\nu(u) = \eta(u_1) + c_0(u - u_1) + \sum_{i=1}^{\nu} c_i(u - u_i)^+, \quad \begin{array}{l} a = u_1 < \dots < u_\nu < u_{\nu+1} = b, \\ c_i \geq 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, \nu. \end{array} \quad (1.4)$$

**Dim.** Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  siano  $u_1, \dots, u_{\nu+1} \in [a, b]$  tali che

$$a = u_1 < u_2 < \dots < u_\nu < u_{\nu+1} = b, \quad u_{i+1} - u_i = \frac{b - a}{\nu}. \quad (1.5)$$

Sia  $c_0 \doteq \eta'_-(a) - 1$ , dove  $\eta'_-(a)$  è la derivata sinistra di  $\eta$  in  $a$ , che sappiamo esistere essendo  $\eta$  convessa. Poniamo

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\eta(u_2) - \eta(u_1)}{u_2 - u_1} - c_0 \\ c_2 &\doteq \frac{\eta(u_3) - \eta(u_2)}{u_3 - u_2} - (c_1 + c_0) = \frac{\eta(u_3) - \eta(u_2)}{u_3 - u_2} - \frac{\eta(u_2) - \eta(u_1)}{u_2 - u_1}, \\ c_{i+1} &= \frac{\eta(u_{i+2}) - \eta(u_{i+1})}{u_{i+2} - u_{i+1}} - \sum_{j \leq i} c_j = \frac{\eta(u_{i+2}) - \eta(u_{i+1})}{u_{i+2} - u_{i+1}} - \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u_i)}{u_{i+1} - u_i}, \\ & \hspace{15em} i = 2, \dots, \nu - 1, \end{aligned}$$

da cui  $c_i \geq 0$  per  $i = 1, \dots, \nu$ , sempre grazie alla convessità di  $\eta$ . Definiamo  $\eta_\nu$  come in (1.4) e osserviamo che (vedi figura 1.1)

$$\eta_\nu(u) = \eta(u_i) + \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u_i)}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i), \quad u \in [u_i, u_{i+1}[,$$

È evidente che  $\eta_\nu$  è funzione continua. Inoltre, poiché  $\eta$ , essendo convessa, è funzione lipschitziana in  $[a, b]$ , se  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  vale

$$\begin{aligned} |\eta_\nu(u) - \eta(u)| &= \left| \eta(u_i) + \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u_i)}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i) - \eta(u) \right| \\ &\leq |\eta(u_i) - \eta(u)| + \left| \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u_i)}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i) \right| \\ &\leq 2L|u - u_i|, \end{aligned}$$

dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $\eta$  in  $[a, b]$ , da cui, per (1.5), si deduce che  $\eta_\nu \rightarrow \eta$  uniformemente in  $[a, b]$ .  $\square$

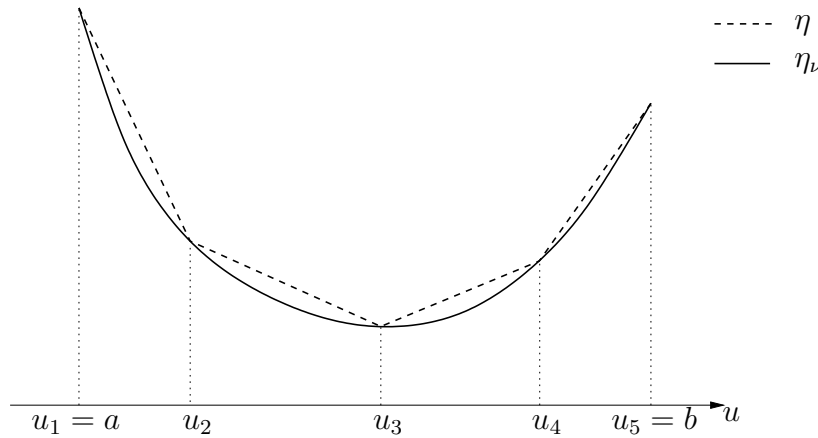


Figura 1.1: Le approssimanti  $\eta_\nu$  in (1.4)

**Osservazione 1.1** Si noti che la successione  $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  è tale che

$$\eta'_\nu(u) \rightarrow \eta'(u) \quad \text{per q.o. } u \in [a, b].$$

Infatti,  $\eta'$  esiste q.o. in  $[a, b]$  essendo  $\eta$  convessa su  $\mathbb{R}$  e quindi lipschiziana in  $[a, b]$ , mentre  $\eta_\nu$  è derivabile in  $[a, b]$  esclusi al più i punti  $u_1, \dots, u_{\nu+1}$ . Sia allora

$$\mathcal{N} \doteq \bigcup_{\nu} \{u_1, \dots, u_{\nu+1}\} \cup \{u \in [a, b] : \eta \text{ non è derivabile in } u\}.$$

È evidente che  $\mathcal{N}$  ha misura di Lebesgue nulla. Inoltre, fissato  $u \notin \mathcal{N}$  e  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $u_i < u < u_{i+1}$ , grazie alla convessità di  $\eta$ , si ha

$$\frac{\eta(u) - \eta(u_i)}{u - u_i} \leq \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u_i)}{u_{i+1} - u_i} = \eta'_\nu(u) \leq \frac{\eta(u_{i+1}) - \eta(u)}{u_{i+1} - u},$$

da cui si ottiene l'asserto facendo tendere  $\nu \rightarrow +\infty$ .

### 1.2.1 Funzioni BV

Durante la trattazione del problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare, useremo *funzioni a variazione totale limitata* e loro proprietà, che nel seguito richiamiamo. Per una trattazione più approfondita e una dimostrazione dei risultati, rimandiamo ai capitoli introduttivi del testo di A. Bressan [2] o ad un libro di analisi reale, per esempio [7].

**Definizione 1.1** Sia  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  intervallo. Una funzione  $u : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice a *variazione totale limitata* se

$$\text{Tot.Var.}(u) \doteq \sup \left\{ \sum_{i=1}^N |u(x_i) - u(x_{i-1})| : x_i \in \mathcal{I}, x_0 < x_1 < \dots < x_N \right\} < +\infty. \quad (1.6)$$

La quantità  $\text{Tot.Var.}(u)$  si dice *variazione totale* della funzione  $u$ . L'insieme delle funzioni a valori in  $\mathbb{R}^n$  a variazione totale limitata su  $\mathcal{I}$  verrà indicato con  $\mathbb{BV}(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$  (dove  $\mathbb{BV}$  sta per "Bounded Variation")

Esempi di funzioni a variazione totale limitata sono le funzioni monotone limitate. Inoltre se  $u : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  intervallo, è funzione  $\mathcal{C}^1$  al di fuori di un numero finito di punti di salto  $x_1, \dots, x_\kappa$ , ed esistono finiti i limiti sinistro  $u(x_j-)$  e destro  $u(x_j+)$  di  $u$  in ciascun punto  $x_j$ , allora si può dimostrare che

$$\text{Tot.Var.}(u) = \sum_{j=1}^{\kappa} |u(x_j+) - u(x_j-)| + \int_{\mathcal{I}} |u'(t)| dt,$$

dove  $u'$  è la derivata di  $u$  al di fuori dei punti di salto.

Le funzioni a variazione totale limitata su un intervallo  $\mathcal{I}$  godono delle seguenti proprietà

1. sono limitate;
2. hanno limiti destro e sinistro finiti in ogni punto di  $\mathcal{I}$ ; se in particolare  $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ , allora esistono finiti anche i limiti a  $-\infty$  e a  $+\infty$ ;
3. hanno una quantità al più numerabile di punti di discontinuità.

La dimostrazione del lemma che segue è diretta conseguenza del teorema di densità in  $\mathbb{L}^1(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$  delle funzioni che sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

**Lemma 1.3**  $\mathbb{BV}(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{L}^1(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$  è denso in  $\mathbb{L}^1(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$ .

Inoltre vale il seguente lemma di approssimazione, la cui dimostrazione si può trovare in [2, Lemma 2.2].

**Lemma 1.4** Sia  $u \in \mathbb{BV}(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $v \in \mathbb{BV}(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$  costante a tratti tale che

$$\text{Tot.Var.}(v) \leq \text{Tot.Var.}(u) \quad e \quad \|u - v\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Se poi vale anche  $u \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  allora è possibile scegliere  $v$  in modo che

$$\|u - v\|_1 \leq \varepsilon.$$

Inoltre, vale il seguente teorema di compattezza (vedi [2, Teorema 2.3] per la dimostrazione).

**Teorema 1.2 (Helly)** Sia data una successione di funzioni  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{BV}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  tale che esistono delle costanti positive  $C$  e  $M$  per cui valga

$$\text{Tot.Var.}(u_\nu) \leq C, \quad \|u_\nu\|_{\infty} \leq M \quad \text{per ogni } \nu. \quad (1.7)$$

Allora esiste una funzione  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e una sottosuccessione  $\{u_{\nu_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\nu_k}(x) = u(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

$$\text{Tot.Var.}(u) \leq C, \quad \|u\|_{\infty} \leq M. \quad (1.9)$$

Dal teorema di Helly, segue questo altro teorema di compattezza in  $\mathbb{L}_{loc}^1$  (vedi [2, Teorema 2.4] per la dimostrazione).

**Teorema 1.3** *Sia data una successione di funzioni  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  definite in  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  tali che esistono delle costanti positive  $C$ ,  $L$ , e  $M$  per cui valgono*

$$\text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, t)) \leq C, \quad \|u_\nu\|_\infty \leq M \quad \text{per ogni } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } t \geq 0, \quad (1.10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t) - u_\nu(x, s)| \, dx \leq L|t - s| \quad \text{per ogni } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } t, s \geq 0. \quad (1.11)$$

Allora esiste una sottosuccessione  $\{u_{\nu_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente in  $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$  ad una funzione  $u$  che soddisfa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u(x, s)| \, dx \leq L|t - s| \quad \text{per ogni } t, s \geq 0. \quad (1.12)$$

Inoltre, a meno di insiemi di misura nulla,  $u$  coincide con una funzione continua a destra  $\tilde{u}$  che soddisfa

$$\text{Tot.Var.}(\tilde{u}(\cdot, t)) \leq C \quad \text{per ogni } t, \quad \|\tilde{u}\|_\infty \leq M. \quad (1.13)$$

## 1.3 Equazione di trasporto

### 1.3.1 Il problema omogeneo

Consideriamo il problema di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$  per l'equazione di trasporto omogenea

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \langle g(x, t), Du(x, t) \rangle = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.14)$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  e  $g : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  è funzione di classe  $\mathcal{C}^1$ , in entrambe le variabili, lipschitziana in  $x$  su ogni sottoinsieme del tipo  $\mathbb{R}^n \times K$ , con  $K \subset [0, +\infty[$  compatto. Supponiamo che  $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione di classe  $\mathcal{C}^1$  che soddisfa (1.14). Cerchiamo di calcolarne una forma esplicita, cioè calcoliamo  $u(x, t)$  per  $x$  e  $t$  fissati. Denotiamo con  $\xi(\cdot; x, t)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\xi}(s) = g(\xi(s), s) \\ \xi(t) = x, \end{cases} \quad (1.15)$$

che sappiamo esistere unica e definita su tutto l'intervallo  $[0, +\infty[$  grazie alle ipotesi fatte su  $g$ . Sia

$$z(s) = u(\xi(s; x, t), s) \quad \Rightarrow \quad z(t) = u(x, t).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= \frac{d}{ds} u(\xi(s; x, t), s) = \langle Du(\xi(s; x, t), s), \dot{\xi}(s; x, t) \rangle + \partial_s u(\xi(s; x, t), s) \\ &= \langle Du(\xi(s; x, t), s), g(\xi(s; x, t), s) \rangle + \partial_s u(\xi(s; x, t), s) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

da cui si deduce che  $z(\cdot)$  è una funzione costante su  $[0, +\infty[$ . Quindi  $z(t) = z(0)$  da cui

$$u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t)). \quad (1.17)$$

Si ottiene che, se  $u$  è soluzione di classe  $\mathcal{C}^1$  di (1.14), allora necessariamente deve verificare (1.17). Si osservi che, dire che la funzione  $z(\cdot)$  di cui sopra è costante su  $[0, t]$  equivale a dire che  $u$  è costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria  $\dot{\xi} = g(\xi, t)$ .

Notiamo ora che  $u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t))$  è in effetti (l'unica) soluzione di (1.14). Infatti, se  $u$  verifica (1.17), allora

1.  $u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  perché composizione di funzioni di classe  $\mathcal{C}^1$ ;
2.  $u(x, 0) = u_0(x)$  banalmente;
3. se  $s \in [0, t]$  si ha

$$u(\xi(s; x, t), s) = u_0(\xi(0; x, t)),$$

e quindi da (1.16) con  $s = t$  si ottiene che  $u$  soddisfa l'equazione differenziale in (1.14).

Quindi (1.14) ha un'unica soluzione e questa è data da (1.17).

**Osservazione 1.2** Fissato un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , se  $u_0(\bar{x}) = \bar{u}$ , (1.17) afferma che

$$u(\xi(t; \bar{x}, 0)) = \bar{u}.$$

Questo significa che nel tempo ogni punto del profilo del dato iniziale viene spostato con velocità data da  $g$  (vedi figura 1.2).

**Esempio 1.1** Prendiamo in (1.14)  $g$  costantemente uguale ad un elemento  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , cosicché (1.14) diventa

$$\partial_t u + \langle \mathbf{b}, Du \rangle = 0. \quad (1.18)$$

Con le notazioni di prima,  $\xi(s; x, t) = x + (s - t)\mathbf{b}$ , da cui

$$u(x, t) = u_0(x - t\mathbf{b}),$$

e quindi la dinamica descritta dall'equazione (1.18) prevede che il dato iniziale venga traslato con velocità costante  $\mathbf{b}$ .

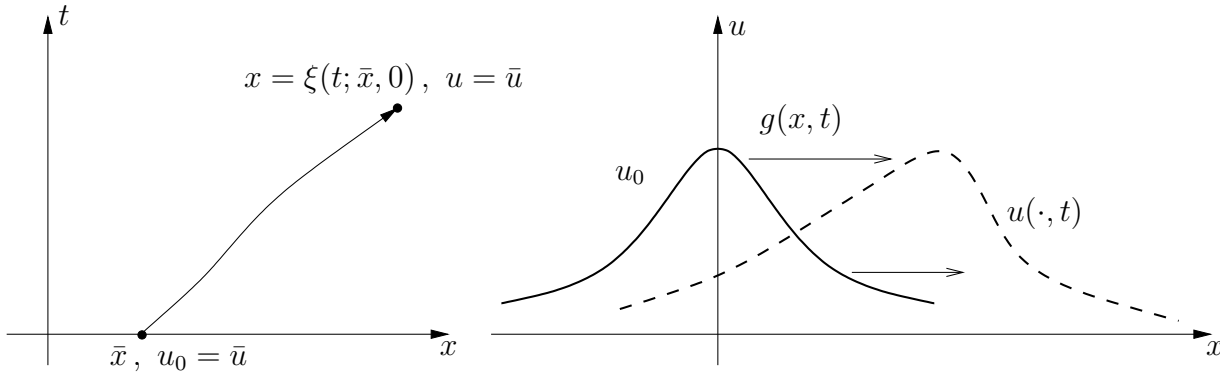


Figura 1.2: L'osservazione 1.2

### 1.3.2 Il problema non omogeneo

Prendiamo ora in considerazione il problema non omogeneo, e quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \langle g(x, t), Du(x, t) \rangle = f(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.19)$$

dove  $u_0$  e  $g$  soddisfano le stesse ipotesi del paragrafo precedente, mentre  $f : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la supponiamo continua in entrambe le variabili. Supponiamo che  $u$  risolva (1.19) e, come al paragrafo precedente, cerchiamo di calcolare esplicitamente  $u(x, t)$ . Se  $\xi(\cdot; x, t)$  soddisfa (1.15), allora  $z(s) = u(\xi(s; x, t), s)$  soddisfa

$$\dot{z}(s) = f(\xi(s; x, t), s), \quad z(0) = u_0(\xi(0; x, t)),$$

da cui

$$u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t)) + \int_0^t f(\xi(s; x, t), s) ds. \quad (1.20)$$

D'altra parte, se definiamo  $u$  come in (1.20), allora è di classe  $\mathcal{C}^1$ , soddisfa  $u(x, 0) = u_0(x)$  ed inoltre

$$\frac{d}{ds} u(\xi(s; x, t), s) = f(\xi(s; x, t), s)$$

per ogni  $s \in [0, t]$ , e quindi, procedendo come nel paragrafo precedente, si ottiene che  $u$  è soluzione di (1.19). Dunque (1.19) ammette un'unica soluzione e questa è data da (1.20).

**Esempio 1.2** Riprendiamo l'esempio 1.1, e risolviamo (1.19) con  $g$  costantemente uguale ad un elemento  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Poiché  $\xi(s; x, t) = x + (s - t)\mathbf{b}$ , da (1.20) si ottiene

$$u(x, t) = u_0(x - t\mathbf{b}) + \int_0^t f(x + (s - t)\mathbf{b}, s) ds.$$



# Capitolo 2

## Leggi di conservazione scalari

### 2.1 Introduzione

Ci occupiamo del problema di Cauchy per una legge di conservazione in una variabile spaziale

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

In questo contesto,  $F$  è funzione definita in un intervallo di  $\mathbb{R}$ , a valori reali, localmente lipschitziana, salvo diverse specificazioni, spesso detta *funzione flusso* o semplicemente *flusso*. Per capire come risolvere (2.1)-(2.2) partiamo da un esempio. Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (2.4)$$

e cerchiamo di risolverlo usando le caratteristiche. Per farlo, scriviamo (2.3) come

$$\partial_t u + u \cdot \partial_x u = 0.$$

Si ottiene il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = 0, \end{cases}$$

dove  $z(t) = u(x(t), t)$ . Con i dati iniziali

$$\xi(0) = x, \quad z(0) = \frac{1}{1 + x^2}$$

si ottiene

$$\xi(t) = x + \frac{t}{1+x^2}, \quad z(t) = \frac{1}{1+x^2},$$

da cui

$$u\left(x + \frac{t}{1+x^2}, t\right) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (2.5)$$

Si osservi che la funzione  $x \mapsto x + (t/1+x^2)$  è iniettiva se e solo se  $t \leq T = 8/\sqrt{27}$ . Infatti

$$\frac{d}{dx} \left[ x + \frac{t}{1+x^2} \right] > 0 \quad \forall x \quad \Leftrightarrow \quad t < \min_{x>0} \frac{(1+x^2)^2}{2x} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

e quindi per  $t > T$  la funzione ha derivata prima che cambia di segno. Questo significa che per  $t > T$  le caratteristiche si incontrano in qualche punto e dunque il problema (2.3)-(2.4) non ha più una soluzione di classe  $\mathcal{C}^1$ , pur avendo una funzione flusso e un dato iniziale di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Se si osserva come evolve la soluzione (2.5) di (2.3)-(2.4), si vede che

$$\liminf_{t \rightarrow T^-} u_x(x, t) = -\infty,$$

cioè si presenta una *catastrofe del gradiente* (vedi figura 2.1). Infatti, da (2.5) si ricava

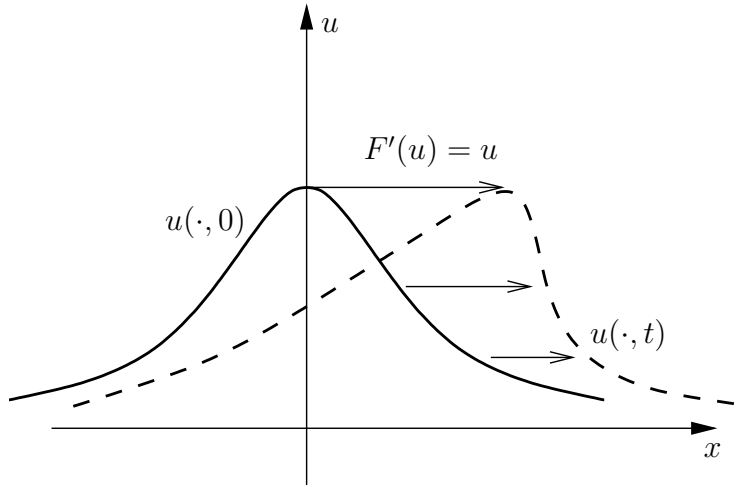


Figura 2.1: Catastrofe del gradiente

$$\frac{d}{dx} u\left(x + \frac{t}{1+x^2}, t\right) = u_x\left(x + \frac{t}{1+x^2}, t\right) \cdot \partial_x \left(x + \frac{t}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Inoltre si ha

$$\partial_x \left[ x + \frac{t}{1+x^2} \right] \Big|_{t=8/\sqrt{27}, x=1/\sqrt{3}} = \left( 1 - \frac{2xt}{(1+x^2)^2} \right) \Big|_{t=8/\sqrt{27}, x=1/\sqrt{3}} = 0.$$

Allora, posto  $\bar{x} = 1/\sqrt{3}$ , si ottiene

$$u_x \left( \bar{x} + \frac{t}{1 + \bar{x}^2}, t \right) = -\frac{2\bar{x}}{(1 + \bar{x}^2)^2} \cdot \left( 1 - \frac{2\bar{x}t}{(1 + \bar{x}^2)^2} \right)^{-1} \rightarrow -\infty \quad \text{per } t \rightarrow (8/\sqrt{27})^- .$$

In pratica, la dinamica descritta dall'equazione (2.3) forza ciascun punto del profilo del dato iniziale a muoversi con velocità  $F'(u) = u$  (vedi figura 2.1). Così il punto  $(0, 1)$  del piano  $(x, u)$  viene spostato con velocità costante 1, mentre, ad esempio, il punto  $(1, 1/2)$  viene spostato con velocità  $1/2 < 1$ , e dunque si muove più lentamente.

Bisogna quindi prevedere che ad un certo istante la soluzione di un'equazione del tipo (2.1) sviluppi delle discontinuità, anche partendo da un dato iniziale molto regolare. Questo problema della nascita di discontinuità in una soluzione di (2.1)-(2.2) è un problema reale. A titolo di esempio, si consideri il modello di traffico (1.2). La formazione di una coda corrisponde alla nascita di una discontinuità nella soluzione di (1.2): si passa da uno stato a bassa densità ad uno a densità massima  $\rho_M$ , per cui la componente  $\rho$  della soluzione risulta discontinua.

Per tentare di risolvere (2.1)-(2.2) per ogni  $t \geq 0$  occorre dunque cercare una nuova definizione di soluzione. Tale nuova definizione deve soddisfare due requisiti

1. che siano ammesse soluzioni che possano anche essere discontinue;
2. che, in ogni caso, il problema (2.1)-(2.2) sia ben posto, cioè che la soluzione esista e sia unica.

I prossimi paragrafi saranno dedicati alla ricerca di una nuova definizione di soluzione. La dimostrazione di un teorema di esistenza di una tale soluzione sarà invece argomento del Capitolo 3. Tale dimostrazione sarà costruttiva, cioè si darà un metodo esplicito (e, volendo, implementabile in un calcolatore) per costruire una soluzione di (2.1)-(2.2).

Diamo ora alcune definizioni che ci saranno utili in seguito

**Definizione 2.1** Una curva  $C \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty[$  si dice di *tipo tempo* se è parametrizzabile da una funzione  $t \mapsto (s(t), t)$  definita su un intervallo  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Si dice inoltre di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti se la funzione  $s(\cdot)$  è lipschitziana ed esistono  $t_1 < t_2 < \dots < t_\kappa \in \mathbb{R}^{>0}$  per cui nei sottointervalli  $]t_i, t_{i+1}[ \subseteq \mathcal{I}$  la funzione  $s(\cdot)$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ .

Esempi di curve tipo tempo di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti sono le poligonali con lati non paralleli all'asse  $x$  (vedi figura 2.2). Nel seguito di queste note faremo anche uso delle nozioni di *funzione  $\mathcal{C}^1$  a pezzi* e *funzione costante a pezzi*.

**Definizione 2.2** Una funzione  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $\mathcal{C}^1$  a pezzi se esiste un numero finito di curve lipschitziane  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  tali che  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[ \setminus \cup_i \Gamma_i$  ha un numero finito di componenti connesse su ciascuna delle quali  $u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ , uniformemente continua con la sue derivate.

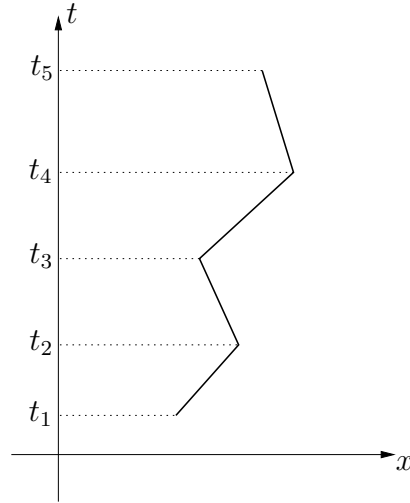


Figura 2.2: Curve tipo tempo di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti

**Definizione 2.3** Una funzione  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *costante a pezzi* se esiste un numero finito di curve lipschitziane  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  tali che  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[ \setminus \cup_i \Gamma_i$  ha un numero finito di componenti connesse su ciascuna delle quali  $u$  è costante.

Si osservi che una funzione costante a pezzi (vedi figura 2.3 per un esempio) è in particolare  $\mathcal{C}^1$  a pezzi.

## 2.2 Soluzioni deboli

Per ottenere una nuova definizione di soluzione, partiamo da una soluzione “classica”  $u$  di (2.1), cioè una funzione  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  che verifichi (2.1) in ogni punto  $(x, t)$  di  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , e cerchiamo una qualche proprietà verificata da  $u$ , che però non richieda a priori le stesse proprietà di regolarità di cui  $u$  gode. L’idea è di moltiplicare (2.1) per una funzione molto regolare  $\varphi$  (detta “funzione test”) e poi di integrare per parti “trasferendo” le derivate da  $u$  a  $\varphi$ . Fissiamo allora  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Supponendo in questo contesto  $F$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , e procedendo come esposto, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u_t + F(u)_x\} \varphi \, dx dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u \varphi_t + F(u) \varphi_x\} \, dx dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

che vale qualsiasi sia la funzione  $\varphi$  fissata con la regolarità richiesta. Inoltre, se l’integrale nell’ultima riga è nullo per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ , e  $u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ , allora necessariamente

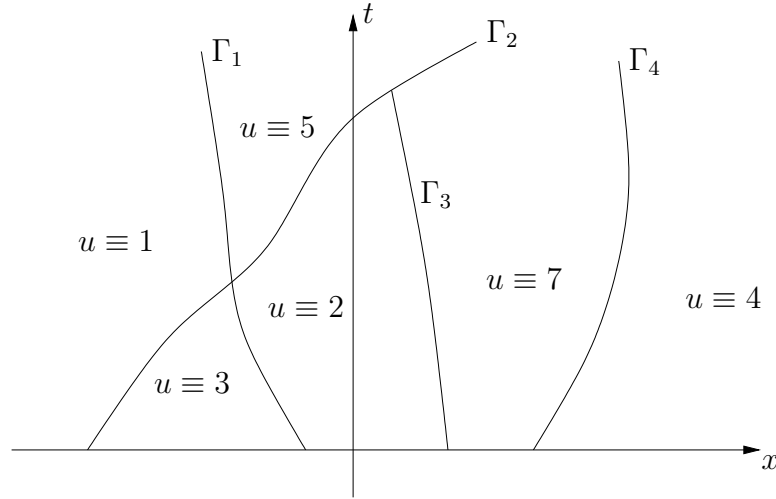


Figura 2.3: Funzione costante a pezzi

$u$  deve verificare (2.1). Infatti, se così non fosse esisterebbe un punto  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  dove (2.1) non è verificata. Per fissare le idee supponiamo che sia

$$\partial_t u(\bar{x}, \bar{t}) + \partial_x F(u(\bar{x}, \bar{t})) > 0. \quad (2.7)$$

Data la regolarità delle funzioni coinvolte esiste una palla  $B \subset \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  centrata in  $(\bar{x}, \bar{t})$  tale che

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x F(u(x, t)) > 0 \quad \forall (x, t) \in B. \quad (2.8)$$

Prendiamo ora una funzione  $\varphi$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , positiva e non nulla, il cui supporto sia contenuto in  $B$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 < \iint_B \{u_t + F(u)_x\} \varphi \, dx dt &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u_t + F(u)_x\} \varphi \, dx dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u \varphi_t + F(u) \varphi_x\} \, dx dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

e dunque (2.6) non è verificata. Quindi, almeno per soluzioni classiche, è equivalente dire che  $u$  verifica (2.1) o che  $u$  verifica (2.6) per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Quanto scritto nell'ultima riga di (2.6) ha però senso anche per funzioni  $u$  non necessariamente derivabili, anzi anche per funzioni discontinue. È dunque lecito dare la seguente definizione.

**Definizione 2.4** Una funzione  $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  si dice soluzione debole di (2.1) se vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u \varphi_t + F(u) \varphi_x\} \, dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[). \quad (2.10)$$

La stessa funzione è soluzione debole di (2.1)-(2.2) se è soluzione debole di (2.1), soddisfa (2.2) per q.o.  $x \in \mathbb{R}$  ed inoltre  $u \in C^0([0, +\infty[; \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$ .

### 2.2.1 Le condizioni di Rankine–Hugoniot

In questo paragrafo ricaveremo delle condizioni affinché una funzione di classe  $C^1$  al di fuori di un numero finito di curve regolari sia soluzione debole di (2.1).

**Teorema 2.1** *Sia  $u : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di classe  $C^1$  a pezzi, con discontinuità lungo un numero finito di curve di classe  $C^1$  a tratti tipo tempo  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ . Allora  $u$  è soluzione debole di (2.1) nel senso della definizione 2.4 se e solo se valgono*

1.  $u$  soddisfa l'equazione (2.1) in senso classico al di fuori delle curve  $\Gamma_j$ , cioè vale

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x F(u(x, t))_x = 0 \quad \text{per q.o. } (x, t) : (x, t) \notin \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, N; \quad (2.11)$$

2. se  $t \mapsto (s(t), t)$  è la parametrizzazione di una delle curve  $\Gamma_j$  per qualche fissato  $j \in \{1, \dots, N\}$ , e  $t_1 < t_2 < \dots < t_\kappa$  sono come nella definizione 2.1, allora valgono le condizioni di Rankine–Hugoniot

$$F(u_d(t)) - F(u_s(t)) = \dot{s}(t) \cdot [u_d(t) - u_s(t)] \quad \forall t \neq t_i, \quad i = 1, \dots, \kappa, \quad (2.12)$$

dove  $u_s(t)$  e  $u_d(t)$  sono rispettivamente il limite sinistro e destro di  $u(\cdot, t)$  per  $x \rightarrow s(t)$ .

**Dim.** Per semplicità assumiamo che  $F$  sia di classe  $C^1$ . Siano

$$\Omega_1, \dots, \Omega_m \quad \text{le componenti connesse di } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \setminus \cup_j \Gamma_j. \quad (2.13)$$

Supponiamo che  $u$  sia soluzione debole di (2.1) e dunque soddisfi (2.10). Per dimostrare la prima proprietà, osserviamo che, poichè  $u$  è di classe  $C^1$  in  $\Omega_k$  per ogni  $k = 1, \dots, m$ , per ogni funzione  $\varphi$  di  $C_c^1(\Omega_k)$  vale

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt = \iint_{\Omega_k} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt \\ &= - \iint_{\Omega_k} [u_t + F(u)_x] \varphi \, dxdt, \end{aligned}$$

per il teorema della divergenza applicato al campo vettoriale

$$(x, t) \mapsto (F(u(x, t))\varphi(x, t), u(x, t)\varphi(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega_k.$$

Argomentando come in (2.7)-(2.9), si ottiene che  $u$  verifica (2.1) in senso classico in  $\Omega_k$ , per ogni  $k$ .

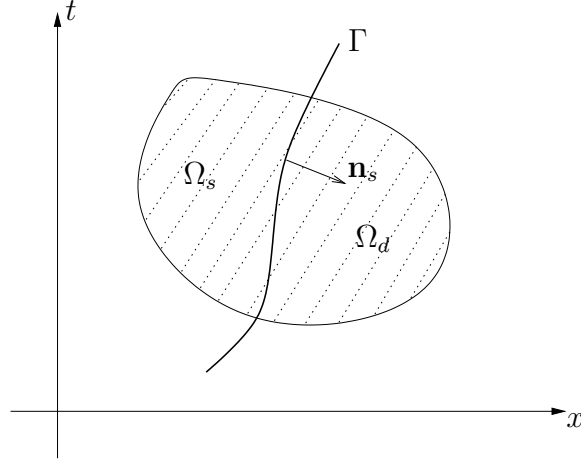


Figura 2.4: Condizioni di Rankine–Hugoniot

Veniamo ora alla seconda proprietà. Sia  $\Omega$  un aperto connesso con frontiera regolare, intersecante solo  $\Gamma \doteq \Gamma_j$  tra tutte le curve lungo le quali  $u$  è discontinua (vedi figura 2.4). Chiamiamo  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$  rispettivamente le componenti connesse di  $\Omega \setminus \Gamma$  a sinistra e destra della curva  $\Gamma$ . In formule

$$\begin{aligned}\Omega_s &\doteq \{(x, t) \in \Omega : x < s(t)\}, \\ \Omega_d &\doteq \{(x, t) \in \Omega : x > s(t)\}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Fissiamo una qualunque funzione test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$  e utilizziamo questa in (2.10). Si ottiene

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt \\ &= \iint_{\Omega_s} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt + \iint_{\Omega_d} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt.\end{aligned}$$

Applicando il teorema della divergenza ad entrambi gli integrali e tenuto conto che  $u$  soddisfa l'equazione (2.1) puntualmente in  $\Omega \setminus \Gamma$ , si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_s} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt &= - \iint_{\Omega_s} [u_t + F(u)_x]\varphi \, dxdt + \int_{\Gamma} (F(u_s), u_s) \cdot \mathbf{n}_s \varphi \, dl \\ &= \int_{\Gamma} \langle (F(u_s), u_s), \mathbf{n}_s \rangle \varphi \, dl,\end{aligned}$$

e una relazione analoga per l'integrale esteso a  $\Omega_d$ . Nell'ultima formula,  $\mathbf{n}_s$  indica la normale esterna a  $\Omega_s$  lungo  $\Gamma$ ,  $u_s$  è il valore del limite sinistro di  $u$  in un punto di  $\Gamma$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ . Poiché

$$\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_d \doteq \mathbf{n},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \langle (F(u_s), u_s), \mathbf{n} \rangle \varphi \, d\ell - \int_{\Gamma} \langle (F(u_d), u_d), \mathbf{n} \rangle \varphi \, d\ell \\ &= \int_{\Gamma} \langle (F(u_s) - F(u_d), u_s - u_d), \mathbf{n} \rangle \varphi \, d\ell. \end{aligned}$$

Date l'arbitrarietà di  $\varphi$  e la regolarità di  $u$  deve allora valere

$$\langle (F(u_s) - F(u_d), u_s - u_d), \mathbf{n} \rangle = 0 \quad (2.15)$$

in ogni punto di  $\Gamma$ . Poiché

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}}(1, -\dot{s}),$$

da (2.15) si ottiene che per ogni  $t$  deve valere (2.12). Dunque anche la seconda proprietà enunciata nella tesi del teorema è vera.

Supponiamo ora che  $u$  soddisfi le proprietà 1 e 2, oltre alle ipotesi di regolarità, e dimostriamo che allora è soluzione debole di (2.1) nel senso della definizione 2.4. Fissiamo una qualunque funzione  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Allora, usando la notazione introdotta in (2.13) e applicando il teorema della divergenza si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt &= \sum_{k=1}^m \iint_{\Omega_j} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} \, dxdt \\ &= - \sum_{k=1}^m \iint_{\Omega_j} [u_t + F(u)_x] \varphi \, dxdt \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle (F(u_s^j) - F(u_d^j), u_s^j - u_d^j), \mathbf{n}_j \rangle \varphi \, d\ell, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove  $\mathbf{n}_j$  è la normale a  $\Gamma_j$  diretta da sinistra a destra della curva  $\Gamma_j$  (vedi figura 2.4) e  $u_s^j$  e  $u_d^j$  sono i limiti di  $u$  a sinistra e destra di  $\Gamma_j$ . Si osservi che il penultimo integrale di (2.16) è nullo grazie alla proprietà 1, mentre l'ultimo è nullo grazie alle condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12). Quindi (2.10) è verificata.  $\square$

Le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12) in pratica assegnano la velocità  $\lambda$  con cui si deve muovere un salto  $(u_s, u_d)$  in una funzione  $\mathcal{C}^1$  a pezzi  $u$  affinché questa sia soluzione debole di (2.1). Ad esempio, se prendiamo l'equazione di Burgers (2.3), la funzione costante a pezzi  $u$  definita da

$$u(x, t) \doteq \begin{cases} u_s & \text{se } x < \lambda t \\ u_d & \text{se } x \geq \lambda t \end{cases}$$

è soluzione debole se e solo se  $\lambda$  soddisfa

$$(u_d^2/2) - (u_s^2/2) = \lambda(u_d - u_s) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{u_d + u_s}{2}.$$



Nello stesso contesto, ci si riferisce alla coppia  $(u_s, u_d)$  come ad uno *shock* o *fronte d'onda*, e a  $\lambda$  come alla *velocità del fronte d'onda*. Quando due fronti d'onda si incontrano, cioè due linee di discontinuità si intersecano nel piano  $(x, t)$ , si dice anche che *interagiscono*. Ad esempio, si può verificare facilmente usando il teorema 2.1 che la funzione costante a pezzi nel senso della definizione 2.3 (vedi figura 2.5)

$$u(t, x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < \min\{t, 2-t\} \\ 0 & \text{se } t \leq x < 3-2t, 0 < t < 1 \\ -4 & \text{se } x \geq \max\{3-2t, 2-t\} \end{cases}$$

è soluzione debole dell'equazione di Burgers (2.3). Essa presenta due fronti d'onda per

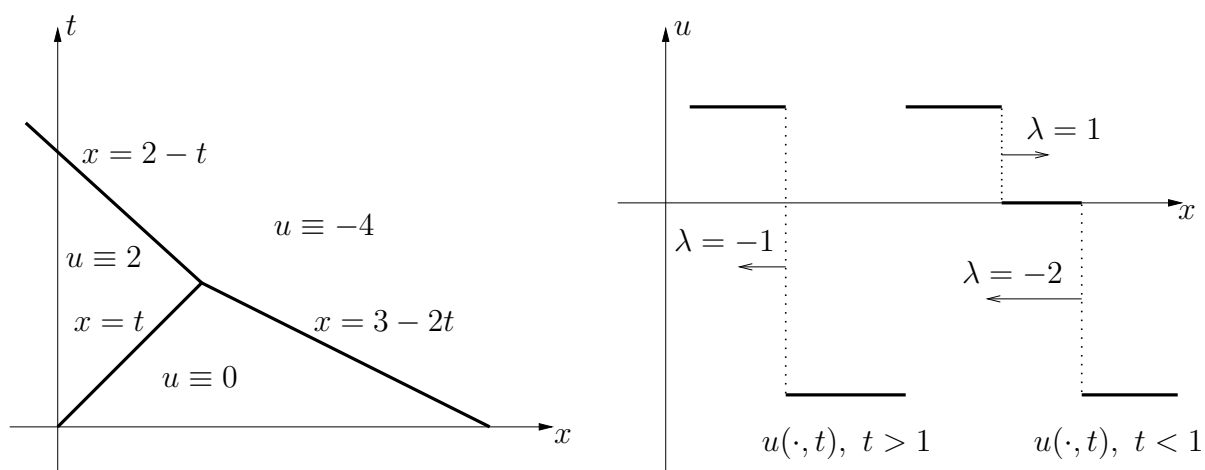


Figura 2.5: Fronti d'onda

$0 < t < 1$ , e precisamente i fronti  $(2, 0)$  con velocità  $\lambda = 1$  e  $(0, -4)$  con velocità  $\lambda = -2$ . Questi interagiscono all'istante  $t = 1$ , dando origine ad un nuovo shock  $(2, -4)$  che viaggia con velocità  $\lambda = -1$ .

## 2.3 Soluzioni entropicamente ammissibili

Le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12) da sole non bastano ad individuare un'unica soluzione per (2.1)-(2.2), come si evince dal seguente esempio. Consideriamo l'equazione di Burgers in (2.3) e ad essa associamo il dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

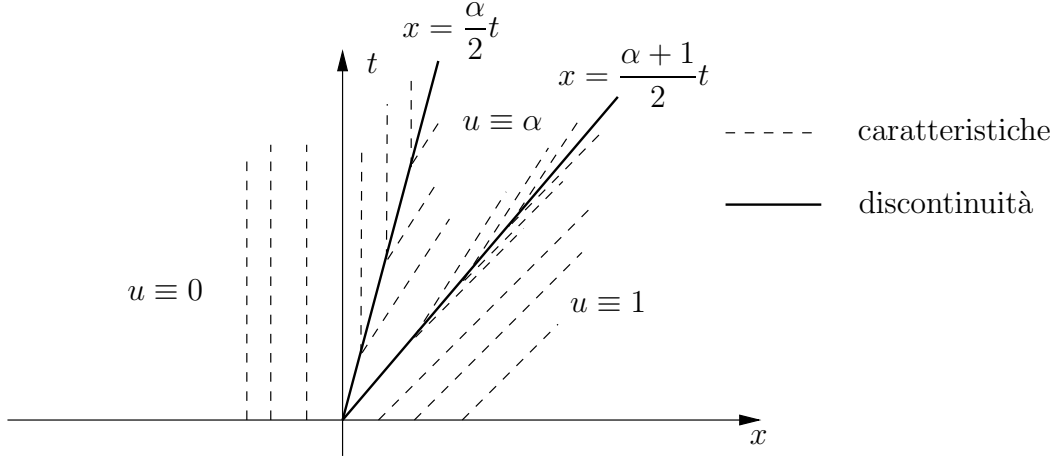


Figura 2.6: Non unicità della soluzione

Allora, per ogni  $\alpha \in [0, 1]$  la funzione (vedi figura 2.6)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \alpha t/2 \\ \alpha & \text{se } \alpha t/2 \leq x < (\alpha + 1)t/2 \\ 1 & \text{se } x \geq (\alpha + 1)t/2 \end{cases} \quad (2.17)$$

è soluzione del problema. Infatti  $u$  è costante al di fuori delle rette  $x = \alpha t/2$  e  $x = (\alpha + 1)t/2$  (e dunque soddisfa (2.1) in senso classico) e lungo tali rette valgono le condizioni di Rankine-Hugoniot. Ne segue che dobbiamo individuare un criterio per selezionare le discontinuità che sono “fisicamente” ammissibili da quelle che non lo sono.

**Definizione 2.5** Siano dati  $u_s, u_d, \lambda \in \mathbb{R}$ . La funzione  $U : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$U(x, t) \doteq \begin{cases} u_s & \text{se } x < \lambda t \\ u_d & \text{se } x \geq \lambda t \end{cases} \quad (2.18)$$

si dice *soluzione entropica* o *soluzione entropicamente ammissibile* per l'equazione (2.1) se sono verificate le condizioni di Rankine-Hugoniot e vale la *condizione di entropia*

$$\frac{F(u^*) - F(u_s)}{u^* - u_s} \geq \frac{F(u_d) - F(u^*)}{u_d - u^*} \quad \forall u^* = \alpha u_d + (1 - \alpha)u_s, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.19)$$

Nello stesso contesto, si dice anche che lo shock  $(u_s, u_d)$  è entropico o entropicamente ammissibile.

**Osservazione 2.1** La condizione (2.19) equivale a una condizione di stabilità. Infatti, se decomponiamo lo shock  $(u_s, u_d)$  in due shocks distinti  $(u_s, u^*)$  e  $(u^*, u_d)$ , con  $u^*$  compreso

fra  $u_s$  e  $u_d$ , il primo membro della (2.19) è la velocità di  $(u_s, u^*)$  data dalle condizioni di Rankine-Hugoniot, e il secondo membro è l'analogo velocità per  $(u^*, u_d)$ . Quindi la velocità di  $(u_s, u^*)$  è maggiore di quella di  $(u^*, u_d)$ , cosicché lo shock più a sinistra  $(u_s, u^*)$  viaggia più velocemente di quello più a destra  $(u^*, u_d)$  (vedi figura 2.7). Facendo evolvere

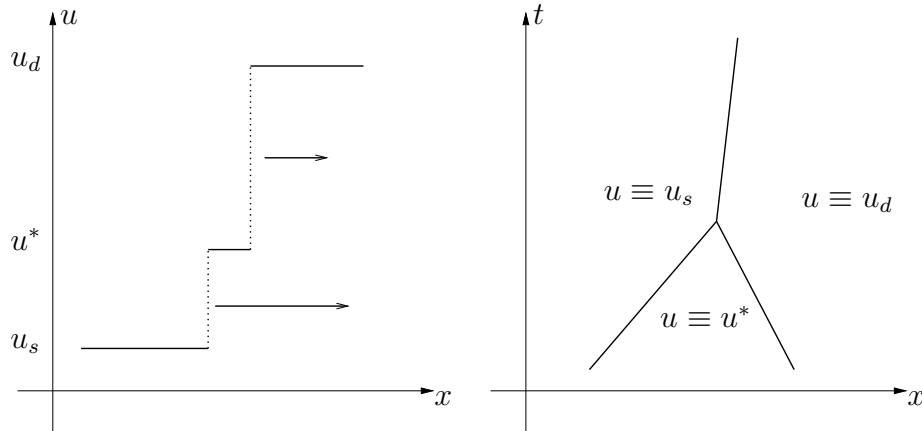


Figura 2.7: La condizione (2.19)

la soluzione, i due shocks, una volta che interagiscono, viaggeranno come un'unica fronte d'onda.

**Osservazione 2.2** Notiamo che dalla condizione (2.19), prendendo prima il limite per  $u^*$  che tende a  $u_s$  in entrambi i membri, e poi l'analogo per  $u^*$  che tende a  $u_d$ , e supponendo  $F$  derivabile, si ottiene la *condizione di stabilità di Lax*

$$F'(u_s) \geq \frac{F(u_d) - F(u_s)}{u_d - u_s} \geq F'(u_d). \quad (2.20)$$

Tale condizione dice che la velocità con cui si muove lo shock è compresa fra la velocità dello stato sinistro e quella dello stato destro. Questa condizione è violata dalla soluzione dell'equazione di Burgers in (2.17). Nel caso in cui  $F$  sia strettamente convessa, la condizione (2.20) è verificata come coppia di disuguaglianze strette, e si dimostra essere equivalente a (2.19) sfruttando la monotonia di  $F'$ . Inoltre (2.20) corrisponde ad una condizione di "caratteristiche entranti" nello shock (vedi figura 2.8), condizione non verificata nella soluzione data da (2.17) (vedi figura 2.6).

La definizione 2.5 è riferita ad una soluzione di (2.1) molto particolare. Ci serve un risultato che generalizzi la condizione (2.19) per soluzioni di (2.1) non necessariamente costanti a pezzi nel senso della definizione 2.3. Prima di enunciarlo, diamo una definizione e dimostriamo un lemma tecnico.

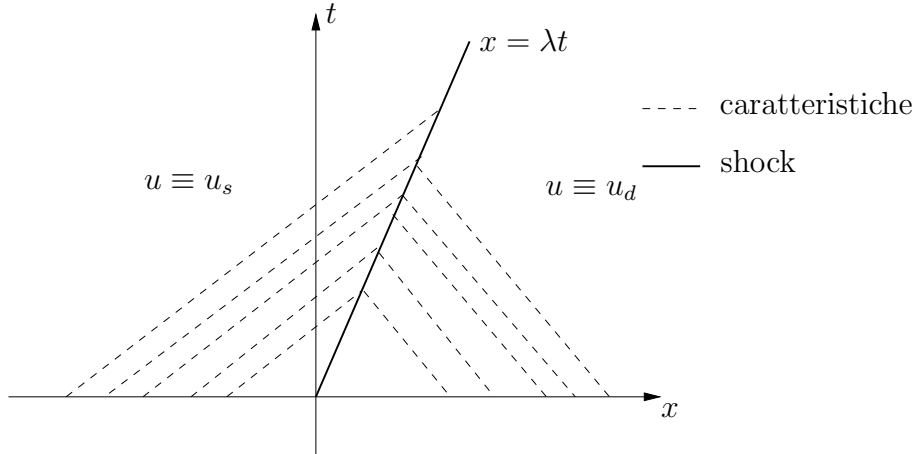


Figura 2.8: Caratteristiche entranti

**Definizione 2.6** Una coppia di funzioni  $(\eta, q)$  tali che  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $\eta$  è convessa e  $q$  localmente lipschitziana con

$$q'(u) = \eta'(u) \cdot F'(u) \quad (2.21)$$

per quasi ogni  $u \in \mathbb{R}$ , si dice *coppia entropia-flusso di entropia* per l'equazione (2.1).

Notiamo che nella definizione 2.6, (2.21) vale almeno per q.o.  $u \in \mathbb{R}$ , essendo  $F$  localmente lipschitziana e quindi derivabile q.o. grazie al teorema 1.1 di Rademacher.

**Lemma 2.1** Siano  $u_s, u_d, \lambda \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\lambda = \frac{F(u_d) - F(u_s)}{u_d - u_s} \quad (2.22)$$

e vale (2.19) se e solo se per ogni coppia di funzioni entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$  vale

$$\lambda[\eta(u_d) - \eta(u_s)] \geq q(u_d) - q(u_s). \quad (2.23)$$

**Dim.** Per fissare le idee, assumiamo che  $u_s < u_d$ . Supponiamo valga (2.23) per ogni coppia di funzioni  $(\eta, q)$  come nelle ipotesi del lemma. Allora prendendo in (2.23) prima  $\eta(u) = u$  e  $q(u) = F(u)$  e poi  $\eta(u) = -u$  e  $q(u) = -F(u)$ , si ottiene

$$\lambda(u_d - u_s) \geq F(u_d) - F(u_s), \quad \lambda(u_d - u_s) \leq F(u_d) - F(u_s),$$

cioè una coppia di disuguaglianze equivalente a (2.22). Dobbiamo allora dimostrare che vale (2.19). Sia allora dato  $u^* \in ]u_s, u_d[$ . Tenuto conto che vale (2.22), (2.19) equivale a

$$\lambda(u_d + u_s - 2u^*) \geq F(u_d) + F(u_s) - 2F(u^*),$$

che si può riscrivere come

$$\lambda(|u_d - u^*| - |u_s - u^*|) \geq \operatorname{sgn}(u_d - u^*) [F(u_d) - F(u^*)] - \operatorname{sgn}(u_s - u^*) [F(u_s) - F(u^*)], \quad (2.24)$$

dove  $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , è la funzione segno<sup>1</sup>. Sia  $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  successione di funzioni convesse tali che  $\eta_\nu(u^*) = 0$  per ogni  $\nu$  e

$$\eta'_\nu(w) \rightarrow \operatorname{sgn}(w - u^*) \quad \text{in } \mathbb{L}^1(u_s, u_d) \quad \text{cosicché} \quad \eta_\nu(w) \rightarrow |w - u^*| \quad \text{in } \mathcal{C}^0([u_s, u_d]). \quad (2.25)$$

Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  definiamo la funzione  $q_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$q_\nu(w) = \int_{u^*}^w \eta'_\nu(s) F'(s) ds. \quad (2.26)$$

Si noti che  $q'_\nu(w) = \eta'_\nu(w) \cdot F'(w)$  per ogni q.o.  $w \in \mathbb{R}$  ed inoltre

$$q_\nu(w) \rightarrow \operatorname{sgn}(w - u^*) [F(w) - F(u^*)] \quad \text{in } \mathcal{C}^0([u_s, u_d]). \quad (2.27)$$

Allora per (2.23) vale

$$\lambda[\eta_\nu(u_d) - \eta_\nu(u_s)] \geq q_\nu(u_d) - q_\nu(u_s), \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

da cui, passando al limite per  $\nu \rightarrow +\infty$ , si ottiene (2.24).

Supponiamo ora che valgano (2.22) e (2.19) e fissiamo  $\eta$  e  $q$  come nelle ipotesi del lemma. Allora, per ogni  $u^* \in ]u_s, u_d[$  vale

$$\lambda[u_d - u^*] \geq F(u_d) - F(u^*), \quad (2.28)$$

Infatti, poiché  $u_s < u^* < u_d$ , da (2.19) si ottiene

$$u^* F(u_s) - u_d F(u_s) - u^* F(u_d) \geq u_s F(u^*) - u_s F(u_d) - u_d F(u^*),$$

da cui (2.28) aggiungendo  $u_d F(u_d)$  ad ambo i membri. Sia  $\{\eta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  successione di funzioni affini a tratti, di cui al lemma 1.2, convergente uniformemente a  $\eta$  nell'intervallo  $[u_s, u_d]$  e rappresentata come in (1.4) con  $a = u_s$  e  $b = u_d$ . Sia  $\{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  successione definita da

$$q_\nu(u) = q(u_s) + \int_{u_s}^u \eta'_\nu(w) F'(w) dw.$$

Si noti che

$$|q_\nu(u) - q(u)| = \left| \int_{u_s}^u [\eta'_\nu(w) - \eta'(w)] F'(w) dw \right| \leq \int_{u_s}^{u_d} |\eta'_\nu(w) - \eta'(w)| |F'(w)| dw,$$

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che la funzione segno è definita da  $\operatorname{sgn} x = x/|x|$  se  $x \neq 0$ , e  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ .

da cui, grazie all'osservazione 1.1 e usando il teorema della convergenza dominata, si ottiene che  $q_\nu$  converge a  $q$  uniformemente in  $[u_s, u_d]$ . Inoltre, indicando con  $u \mapsto H(u)$  la funzione caratteristica dell'intervallo  $[0, +\infty[$ , si ha

$$\begin{aligned} q_\nu(u_d) - q_\nu(u_s) &= \int_{u_s}^{u_d} \eta'_\nu(w) F'(w) dw = c_0 \int_{u_s}^{u_d} F'(w) dw + \sum_{i=0}^{\nu} c_i \int_{u_s}^{u_d} H(w - u_i) F'(w) dw \\ &= c_0 [F(u_d) - F(u_s)] + \sum_{i=0}^{\nu} c_i [F(u_d) - F(u_i)]. \end{aligned}$$

Allora, tenendo presente che vale (2.22) e grazie a (2.28), si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda [\eta_\nu(u_d) - \eta_\nu(u_s)] &= c_0 [F(u_d) - F(u_s)] + \sum_{i=0}^{\nu} c_i \lambda [(u_d - u_i)^+ - (u_s - u_i)^+] \\ &\geq c_0 [F(u_d) - F(u_s)] + \sum_{i=0}^{\nu} c_i [F(u_d) - F(u_i)] \\ &= q_\nu(u_d) - q_\nu(u_s). \end{aligned}$$

da cui si deduce (2.23) passando al limite per  $\nu \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Proposizione 2.1** *La funzione  $U$  definita da (2.18) è soluzione entropica di (2.1) se e solo se per ogni coppia di funzioni entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$  vale*

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(U)\varphi_t + q(U)\varphi_x\} dx dt \geq 0 \quad (2.29)$$

per ogni funzione  $\varphi \geq 0$  di classe  $\mathcal{C}^1$  a supporto compatto in  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ .

**Dim.** Grazie al lemma 2.1 dimostrato sopra, non ci resta che dimostrare che (2.29) è equivalente ad affermare che (2.23) vale per ogni coppia di funzioni entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$ . Sostituendo in (2.29) ad  $U$  la sua espressione in (2.18) si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\lambda t} \{\eta(u_s)\varphi_t + q(u_s)\varphi_x\} dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\lambda t}^{+\infty} \{\eta(u_d)\varphi_t + q(u_d)\varphi_x\} dx dt \geq 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left\{ \eta(u_s) \int_{-\infty}^{\lambda t} \varphi_t dx + \eta(u_d) \int_{\lambda t}^{+\infty} \varphi_t dx \right\} dt \\ &\geq - \int_0^{+\infty} \left\{ q(u_s) \int_{-\infty}^{\lambda t} \varphi_x dx + q(u_d) \int_{\lambda t}^{+\infty} \varphi_x dx \right\} dt. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia  $\lambda > 0$ . Allora, cambiando l'ordine di integrazione nei primi due integrali e tenendo conto che  $\varphi$  è a supporto compatto in  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , si ottiene al primo membro

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, x/\lambda) dx [\eta(u_d) - \eta(u_s)] = \lambda \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda y, y) dy [\eta(u_d) - \eta(u_s)], \quad (2.31)$$

e al secondo membro

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\lambda t, t) dt [q(u_d) - q(u_s)]. \quad (2.32)$$

Poiché  $\varphi(x, t) \geq 0$  per ipotesi, da (2.30)-(2.32), si ottiene che (2.29) e (2.23) sono equivalenti, come si voleva dimostrare.  $\square$

Il vantaggio della formulazione (2.29) rispetto a (2.19) è che essa ha senso anche quando  $U$  è una qualunque funzione  $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  e non solo costante a pezzi, e dunque può essere utilizzata per dare una definizione di soluzione debole entropica di (2.1)-(2.2) che coinvolga non solo funzioni costanti a pezzi.

**Definizione 2.7** Una funzione  $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  si dice *soluzione debole entropica* o *soluzione entropicamente ammissibile* o semplicemente *soluzione entropica* di (2.1) se vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dx dt \geq 0, \quad (2.33)$$

$\forall$  coppia entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$ , e  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ ,  $\varphi \geq 0$ .

La stessa funzione si dice *soluzione debole entropica* o *soluzione entropicamente ammissibile* di (2.1)-(2.2) se è soluzione debole entropica di (2.1), soddisfa (2.2) per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ , ed inoltre  $u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$ .

**Osservazione 2.3** Per le equazioni di Eulero della gas dinamica (1.1), la formula (2.33) si può derivare dal Secondo Principio della Termodinamica ed equivale ad affermare che l'entropia  $\eta$  diminuisce lungo la soluzione  $u$  di (2.1). Ricordiamo che l'entropia matematica è l'opposto di quella fisica (che cresce sempre).

Con i prossimi due teoremi dimostriamo che la definizione 2.7 di soluzione entropicamente ammissibile di (2.1) è compatibile con le definizioni di soluzione debole e di soluzione classica, e quindi di classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Teorema 2.2** Sia  $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  soluzione debole entropica di (2.1). Allora  $u$  è anche soluzione debole nel senso della definizione 2.4.

**Dim.** Si prenda in (2.33) prima  $\eta(u) = u$  e  $q(u) = F(u)$ , e poi  $\eta(u) = -u$  e  $q(u) = -F(u)$ . Per ogni funzione  $\varphi$  a supporto compatto in  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,  $\varphi \geq 0$ , si ottiene la coppia di disuguaglianze

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} dxdt \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u\varphi_t + F(u)\varphi_x\} dxdt \leq 0$$

che è equivalente a (2.10), almeno nel caso in cui  $\varphi \geq 0$  (e quindi anche per  $\varphi \leq 0$ ). Per ottenere (2.10) con una fissata  $\varphi$  di segno non definito, bisogna procedere per approssimazione. Innanzitutto, si scrive  $\varphi$  come differenza delle sue parti positiva  $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$  e negativa  $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\}$ . Queste sono funzioni a supporto compatto e lipschitziane (perché lo è  $\varphi$ ), dunque differenziabili quasi ovunque con derivate limitate, grazie al teorema 1.1 di Rademacher. Quindi, per il lemma 1.1, esistono due successioni di funzioni  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ , chiamiamole  $\{\varphi_\nu^+\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{\varphi_\nu^-\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ , non negative, tali che

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_\nu^+ &\rightarrow \partial_t \varphi^+, & \partial_x \varphi_\nu^+ &\rightarrow \partial_x \varphi^+, \\ \partial_t \varphi_\nu^- &\rightarrow \partial_t \varphi^-, & \partial_x \varphi_\nu^- &\rightarrow \partial_x \varphi^-, \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{L}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[). \quad (2.34)$$

Grazie a quanto dimostrato prima, (2.10) vale prendendo come funzioni test  $\varphi_\nu^+$  e  $\varphi_\nu^-$ , e quindi vale anche prendendo come funzione test  $\varphi_\nu^+ - \varphi_\nu^-$ , cioè

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u(\varphi_\nu^+ - \varphi_\nu^-)_t + F(u)(\varphi_\nu^+ - \varphi_\nu^-)_x\} dxdt = 0. \quad (2.35)$$

Grazie a (2.34) si ha

$$\partial_t(\varphi_\nu^+ - \varphi_\nu^-) \rightarrow \partial_t \varphi, \quad \partial_x(\varphi_\nu^+ - \varphi_\nu^-) \rightarrow \partial_x \varphi \quad \text{in } \mathbb{L}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[).$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  in (2.35), si ottiene che (2.10) vale per la funzione  $\varphi$  fissata, come si voleva dimostrare.  $\square$

Invece di dimostrare direttamente che una soluzione classica è entropicamente ammissibile, dimostriamo un risultato più generale che ci sarà utile in seguito da cui il caso particolare di una soluzione classica discenderà direttamente come corollario. Tale teorema ci fornirà un criterio relativamente semplice per verificare se una certa funzione  $u$ ,  $\mathcal{C}^1$  a pezzi nel senso della definizione 2.2, è soluzione debole entropica di (2.1): per esserlo,  $u$  dovrà avere un numero finito di fronti d'onda entropicamente ammissibili nel senso della definizione 2.5, interagenti fra loro un numero finito di volte, e dovrà soddisfare l'equazione in senso classico quasi ovunque al di fuori delle linee di discontinuità.

**Teorema 2.3** *Sia  $u : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di classe  $\mathcal{C}^1$  a pezzi, con discontinuità lungo un numero finito di curve di classe  $\mathcal{C}^1$  a tratti tipo tempo  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ . Allora  $u$  è soluzione entropicamente ammissibile di (2.1) se e solo se*



1.  $u$  soddisfa l'equazione (2.1) in senso classico q.o. al di fuori delle curve  $\Gamma_j$ , cioè vale (2.11);
2. se  $t \mapsto (s(t), t)$  è la parametrizzazione di una delle curve  $\Gamma_j$  per qualche fissato  $j \in \{1, \dots, N\}$ , e  $t_1 < t_2 < \dots < t_\kappa$  sono come nella definizione 2.1, allora valgono le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12) e le condizioni di entropia

$$\frac{F(u^*) - F(u_s(t))}{u^* - u_s(t)} \geq \frac{F(u_d(t)) - F(u^*)}{u_d(t) - u^*} \quad \forall u^* = \alpha u_d(t) + (1 - \alpha)u_s(t), 0 < \alpha < 1, \\ \forall t \neq t_1, \dots, t_\kappa, \quad (2.36)$$

dove  $u_s(t)$  e  $u_d(t)$  sono rispettivamente il limite sinistro e destro di  $u(\cdot, t)$  per  $x \rightarrow s(t)$ .

**Dim.** Per semplicità, assumiamo  $F$  di classe  $\mathcal{C}^1$ . Supponiamo che  $u$  soddisfi le ipotesi del teorema e sia soluzione debole entropica di (2.1) e dimostriamo che allora valgono le proprietà 1 e 2. Grazie al teorema 2.2  $u$  è soluzione debole e quindi, per il teorema 2.1, essa soddisfa (2.11) e valgono le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12). Dobbiamo far vedere che lungo ogni curva  $\Gamma_j$  valgono le condizioni di entropia (2.36). Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista  $\bar{t} \neq t_i$  per cui (2.36) non sia verificata. Allora dal lemma 2.1 e tenendo conto del fatto che vale (2.12), deduciamo che esiste una coppia entropia–flusso di entropia  $(\eta, q)$  tale che

$$\dot{s}(\bar{t}) [\eta(u_d(\bar{t})) - \eta(u_s(\bar{t}))] < q(u_d(\bar{t})) - q(u_s(\bar{t})). \quad (2.37)$$

Data la regolarità delle funzioni coinvolte in (2.37), esiste un intervallo aperto  $\mathcal{I}$  centrato in  $\bar{t}$  per cui

$$\dot{s}(t) [\eta(u_d(t)) - \eta(u_s(t))] < q(u_d(t)) - q(u_s(t)) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \quad (2.38)$$

e  $t_i \notin \bar{\mathcal{I}}$  per ogni  $i$ , dove  $\bar{\mathcal{I}}$  è la chiusura di  $\mathcal{I}$ . Fissiamo un aperto connesso  $\Omega \subset \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , con frontiera regolare, intersecante solo  $\Gamma_j$  fra tutte le curve lungo le quali  $u$  è discontinua e tale che  $\{(s(t), t) : t \in \mathcal{I}\}$  sia a chiusura compatta in  $\Omega$ . Fissiamo un intervallo  $\mathcal{J}$  non ridotto ad un punto e a chiusura compatta in  $\mathcal{I}$  e sia  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$  una funzione test non negativa tale che

$$\varphi(s(t), t) > 0 \quad \forall t \in \mathcal{J} \quad \text{e} \quad \varphi(s(t), t) = 0 \quad \forall t \notin \mathcal{I}. \quad (2.39)$$

Siano  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$  come in (2.14) (vedi anche figura 2.4 con  $\Gamma = \Gamma_j$ ). Applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale

$$(x, t) \mapsto (q(u(x, t))\varphi(x, t), \eta(u(x, t))\varphi(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega_s \cup \Omega_d,$$

separatamente negli aperti  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$ , e tenendo conto che  $\varphi$  è a supporto compatto in  $\Omega$ , si

ottiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dxdt \\
&= \iint_{\Omega_s} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dxdt + \iint_{\Omega_d} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dxdt \\
&= - \iint_{\Omega} \{\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)\} \varphi dxdt \\
&\quad + \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_s), \eta(u_s)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl - \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_d), \eta(u_d)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale a  $\Gamma_j$  diretta da sinistra a destra della curva stessa. Analizziamo (2.40) termine a termine. Il terzultimo integrale è nullo grazie a (2.11) perché da (2.21) si ottiene

$$\iint_{\Omega} \{\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)\} \varphi dxdt = \iint_{\Omega} \eta'(u) [u_t + F(u)_x] \varphi dxdt. \tag{2.41}$$

Riguardo agli ultimi due integrali, osserviamo che se  $t \mapsto (s(t), t)$  è una parametrizzazione di  $\Gamma_j$ , allora

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} \langle (q(u_s), \eta(u_s)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl &= \int_{\mathcal{I}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} \langle (q(u_s), \eta(u_s)), (1, -\dot{s}(t)) \rangle \varphi(s(t), t) dt, \\
\int_{\Gamma_j} \langle (q(u_d), \eta(u_d)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl &= \int_{\mathcal{I}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} \langle (q(u_d), \eta(u_d)), (-1, \dot{s}(t)) \rangle \varphi(s(t), t) dt.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_s), \eta(u_s)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl - \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_d), \eta(u_d)), \mathbf{n} \rangle \varphi dl \\
&= \int_{\mathcal{I}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} \left\{ q(u_s(t)) - q(u_d(t)) - \dot{s}(t) [\eta(u_s(t)) - \eta(u_d(t))] \right\} \varphi(s(t), t) dt,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

che è quantità strettamente negativa poiché valgono (2.38) e (2.39). Allora, da (2.40) si deduce che

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dxdt < 0,$$

e dunque  $u$  non è soluzione entropicamente ammissibile di (2.1).

Supponiamo ora che valgano le proprietà 1 e 2 nell'enunciato del teorema e dimostriamo che allora  $u$  è soluzione entropicamente ammissibile di (2.1). Per verificare (2.33), fissiamo una coppia entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$  e  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ ,  $\varphi \geq 0$ . Dalle ipotesi su

$u$ , segue che  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \setminus \cup_i \Gamma_i$  ha un numero finito di componenti connesse  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ , su ciascuna delle quali  $u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ . Allora, analogamente a (2.16), applicando il teorema della divergenza su ciascuna componente connessa si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \eta(u) \varphi_t + q(u) \varphi_x \} \, dx dt &= \sum_{i=1}^m \iint_{\Omega_i} \{ \eta(u) \varphi_t + q(u) \varphi_x \} \, dx dt \\
&= - \sum_{i=1}^m \iint_{\Omega_i} \{ \partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \} \varphi \, dx dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_s^j), \eta(u_s^j)), \mathbf{n}_j \rangle \varphi \, dl \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_d^j), \eta(u_d^j)), \mathbf{n}_j \rangle \varphi \, dl,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

dove  $\mathbf{n}_j$  è la normale a  $\Gamma_j$  diretta da sinistra a destra della curva  $\Gamma_j$  e  $u_s^j$  e  $u_d^j$  sono i valori di  $u$  a sinistra e destra di  $\Gamma_j$ . Analizziamo (2.44) termine per termine. Il terzultimo termine è nullo perché valgono (2.11) e (2.41) con  $\Omega_i$  al posto di  $\Omega$ . Per gli altri termini, fissato  $j \in \{1, \dots, N\}$ , sia  $t \mapsto (s(t), t)$  una parametrizzazione di  $\Gamma_j$  e siano  $t_1 < t_2 < \dots < t_\kappa$  come nella definizione 2.1. Allora procedendo come in (2.42)-(2.43) si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} \langle (q(u_s^j), \eta(u_s^j)), \mathbf{n}_j \rangle \varphi \, dl - \int_{\Gamma_j} \langle (q(u_d^j), \eta(u_d^j)), \mathbf{n}_j \rangle \varphi \, dl \\
= \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}} \left\{ q(u_s^j) - q(u_d^j) - \dot{s} [\eta(u_s^j) - \eta(u_d^j)] \right\} \varphi \, dl.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale, la funzione integranda è non negativa perché lo è  $\varphi$  e, grazie a (2.36) e per il lemma 2.1, vale (2.23) con  $\lambda = \dot{s}$ ,  $u_s = u_s^j$  e  $u_d = u_d^j$ . Quindi il contributo totale degli ultimi due termini di (2.44) è non negativo. Ne segue che  $u$  verifica (2.33).  $\square$

**Corollario 2.1** *Sia  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  tale che soddisfi (2.1) per quasi ogni  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Allora  $u$  è soluzione entropicamente ammissibile nel senso della definizione 2.7.*

**Dim.** Essendo  $u$  di classe  $\mathcal{C}^1$  è in particolare  $\mathcal{C}^1$  a pezzi e verifica le condizioni 1 e 2 del teorema 2.3. Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

La definizione di soluzione entropica 2.7 risolve per lo meno il primo problema dell'unicità della soluzione. Vale infatti il seguente risultato dovuto a Kruzhkov.

**Teorema 2.4** Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitziana e siano  $u$  e  $v$  due soluzioni di (2.1) entropicamente ammissibili, limitate e tali che  $\|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{\mathbb{L}^1} < +\infty$ . Allora per ogni  $t > 0$  vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - v(x, t)| \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, 0) - v(x, 0)| \, dx. \quad (2.45)$$

Inoltre, per tutti i dati iniziali  $u_0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ , il problema di Cauchy (2.1)-(2.2) ha al più una soluzione entropicamente ammissibile.

Per una dimostrazione del teorema, si veda [2] oppure [4].

## 2.4 Legame con le equazioni di Hamilton–Jacobi

In un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times ]0, T[$ ,  $T > 0$ , consideriamo l'equazione di Hamilton–Jacobi

$$\partial_t v(x, t) + F(\partial_x v(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.46)$$

con  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$ . Per un'equazione di questo tipo esiste una nozione di soluzione che coinvolge funzioni continue. Precisamente, è data la seguente definizione.

**Definizione 2.8** Dato un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times ]0, T[$ ,  $T > 0$ , una funzione  $v \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  si dice *soluzione di viscosità* per l'equazione (2.46) se per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  si ha

i) se  $v - \varphi$  ha un massimo locale in  $(x_0, t_0) \in \Omega$ , allora vale

$$\varphi_t(x_0, t_0) + F(\varphi_x(x_0, t_0)) \leq 0; \quad (2.47)$$

ii) se  $v - \varphi$  ha un minimo locale in  $(x_0, t_0) \in \Omega$ , allora vale

$$\varphi_t(x_0, t_0) + F(\varphi_x(x_0, t_0)) \geq 0. \quad (2.48)$$

Per una trattazione delle proprietà fondamentali delle soluzioni di viscosità di un'equazione di Hamilton–Jacobi, si rimanda al testo di M. Bardi e I. Capuzzo Dolcetta [1] o ai capitoli ad esse dedicate nel libro di L.C. Evans [6]. In questo paragrafo ci interessa far vedere che, sotto opportune ipotesi, se  $v$  è soluzione di viscosità di (2.46), allora  $v_x$  è soluzione debole entropica di (2.1).

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times ]0, T[$  un aperto tale che

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_d \cup \Gamma,$$

con  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$  aperti disgiunti e  $\Gamma \subset \Omega$  curva  $\mathcal{C}^1$  tipo tempo. Consideriamo una funzione lipschitziana  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$ , e che ammetta estensioni  $\mathcal{C}^1$  su  $\Omega_s \cup \Gamma$  e  $\Omega_d \cup \Gamma$ , chiamiamole rispettivamente  $v_s$  e  $v_d$ . Supponiamo che  $v$  soddisfi l'equazione (2.46)

in  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$  in senso classico (cioè in ogni punto di  $\Omega_s$  e  $\Omega_d$ ), e cerchiamo delle condizioni lungo  $\Gamma$  affinché  $v$  sia soluzione di viscosità di (2.46). Osserviamo che poiché  $v_s(y) = v_d(y)$  per ogni  $y \in \Gamma$ , le eventuali discontinuità del gradiente di  $v$ ,  $(v_x, v_t)$ , riguardano solo la sua componente normale. Detta  $\mathbf{n}(y) = (n^x(y), n^t(y))$  la normale alla curva  $\Gamma$  in  $y$  diretta verso  $\Omega_d$ , denotiamo con

$$c_s = \langle (v_{sx}, v_{st}), \mathbf{n} \rangle, \quad c_d = \langle (v_{dx}, v_{dt}), \mathbf{n} \rangle,$$

le componenti normali a  $\Gamma$  rispettivamente di  $(v_{sx}, v_{st})$  e  $(v_{dx}, v_{dt})$ . Sia  $\mathbf{p}(y) = (p^x(y), p^t(y))$  la proiezione indifferentemente di  $(v_{sx}, v_{st})$  o  $(v_{dx}, v_{dt})$  sulla retta tangente a  $\Gamma$  in  $y$ . Allora vale il seguente risultato, la cui dimostrazione si trova in [3, Teorema 1.3].

**Teorema 2.5** *Con le ipotesi e le notazioni introdotte sopra,  $v$  è soluzione di viscosità di (2.46) se e solo se soddisfa (2.46) in senso classico in  $\Omega_s \cup \Omega_d$  ed inoltre per ogni  $y_0 \in \Gamma$  si ha*

*i) se  $c_d < c_s$ , allora*

$$p^t(y_0) + \xi n^t(y_0) + F(p^x(y_0) + \xi n^x(y_0)) \leq 0 \quad \forall \xi \in [c_d, c_s]; \quad (2.49)$$

*ii) se  $c_d > c_s$ , allora*

$$p^t(y_0) + \xi n^t(y_0) + F(p^x(y_0) + \xi n^x(y_0)) \geq 0 \quad \forall \xi \in [c_s, c_d]. \quad (2.50)$$

Sfruttiamo la caratterizzazione delle soluzioni di viscosità di (2.46) data dal teorema 2.5, per dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 2.6** *Con le notazioni introdotte sopra, sia  $v$  come nelle ipotesi del teorema 2.5, soluzione di viscosità di (2.46). Allora la funzione  $u : \Omega_s \cup \Omega_d \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $u(x, t) = v_x(x, t)$  è soluzione debole entropica di (2.1) in  $\Omega$ .*

**Dim.** Inanzitutto notiamo che  $u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  a pezzi in  $\Omega$  con discontinuità lungo la curva  $\Gamma$ , e che differenziando ambo i membri di (2.46) rispetto a  $x$  si ottiene che  $u$  soddisfa (2.1) in ogni punto di  $\Omega_s \cup \Omega_d$ . Quindi, grazie al teorema 2.3, per dimostrare che  $u$  è soluzione entropica di (2.46) è sufficiente far vedere che lungo  $\Gamma$  sono soddisfatte le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12) e le condizioni di ammissibilità (2.19). Poiché la componente tangenziale lungo  $\Gamma$  di  $(v_x, v_t)$  è continua, detta  $t \mapsto (s(t), t)$  una parametrizzazione di  $\Gamma$ , lungo tale curva si ha

$$\langle (v_{sx}, v_{st}), (\dot{s}, 1) \rangle = \langle (v_{dx}, v_{dt}), (\dot{s}, 1) \rangle. \quad (2.51)$$

Poiché  $v$  ha estensioni  $\mathcal{C}^1$  su  $\Omega_s \cup \Gamma$  e  $\Omega_d \cup \Gamma$ , sfruttando (2.46) da (2.51) si ottiene

$$F(v_{dx}) - F(v_{sx}) = \dot{s}(t)(v_{dx} - v_{sx}),$$

che riscritta in termini di  $u$ , dá le condizioni di Rankine–Hugoniot, essendo  $u_s = v_{sx}$  e  $u_d = v_{dx}$ . Per dimostrare che valgono le condizioni di ammissibilità, sfruttiamo il teorema 2.5,

deducendo (2.36) da (2.49) e (2.50). Ci limiteremo a considerare il caso  $c_d < c_s$ , e quindi la condizione (2.49), essendo l'altro caso del tutto simile da trattare. Con le notazioni introdotte, e intendendo che tutte le quantità coinvolte nel seguito sono calcolate lungo  $\Gamma$ , si ha

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} \langle (v_{sx}, v_{st}), (1, -\dot{s}(t)) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} [u_s + \dot{s}(t)F(u_s)],$$

$$c_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} \langle (v_{dx}, v_{dt}), (1, -\dot{s}(t)) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}(t)^2}} [u_d + \dot{s}(t)F(u_d)],$$

dove si è sfruttato (2.46). Da questa e sfruttando (2.12) si ottiene che  $c_d < c_s$  se e solo se

$$u_d - u_s < \dot{s}(t)[F(u_s) - F(u_d)] = \dot{s}(t)^2[u_s - u_d],$$

da cui  $c_d < c_s$  se e solo se  $u_d < u_s$ . Le componenti di  $\mathbf{p}$  si scrivono

$$p^x = \frac{\dot{s}}{1 + \dot{s}^2} [u_s \dot{s} - F(u_s)], \quad p^t = \frac{1}{1 + \dot{s}^2} [u_s \dot{s} - F(u_s)].$$

Si ottiene che (2.49) è vera se e solo se per ogni  $\xi \in [c_d, c_s]$  vale

$$\frac{1}{1 + \dot{s}^2} (u_s \dot{s} - F(u_s)) - \xi \frac{\dot{s}}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}} + F \left[ \frac{\dot{s}}{1 + \dot{s}^2} (u_s \dot{s} - F(u_s)) + \frac{\xi}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}} \right] \leq 0. \quad (2.52)$$

Scrivendo  $\xi$  come combinazione convessa di  $c_s$  e  $c_d$ , da (2.52) si ottiene che (2.49) è vera se e solo se per ogni  $\alpha \in [0, 1]$  si ha

$$\frac{1}{1 + \dot{s}^2} \left[ \alpha \dot{s}(u_s - u_d) - \alpha F(u_d) \dot{s}^2 - F(u_s) + (1 - \alpha) F(u_s) \dot{s}^2 \right]$$

$$+ F \left[ \frac{1}{1 + \dot{s}^2} \left( \alpha u_d + u_s \dot{s}^2 + (1 - \alpha) u_s + \alpha (F(u_d) - F(u_s)) \right) \right] \leq 0,$$

Da questa, usando (2.12), si ottiene

$$F[\alpha u_d + (1 - \alpha) u_s] \leq \alpha F(u_d) + (1 - \alpha) F(u_s) \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

che, tenuto conto del fatto che  $u_d < u_s$ , è equivalente a (2.19), come si voleva.  $\square$

# Capitolo 3

## Un semigruppato di soluzioni

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo dimostreremo un teorema di esistenza di una soluzione entropica per il problema di Cauchy

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Più precisamente costruiremo un *semigruppato di soluzioni* di (3.1), intendendo con questo una mappa

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : [0, +\infty[ \times \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \\ (t, u_0) &\longmapsto \mathcal{S}_t u_0 \end{aligned}$$

tale che

$$\mathcal{S}_0 u_0 = u_0 \quad \text{per ogni } u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{S}_s(\mathcal{S}_t u_0) = \mathcal{S}_{s+t} u_0 \quad \text{per ogni } u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}), \quad (3.4)$$

$$\text{se } u_0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \text{ allora } \mathcal{S}_{(\cdot)} u_0 \text{ è l'unica soluzione entropica di (3.1)-(3.2)}. \quad (3.5)$$

La dimostrazione del teorema di esistenza seguirà lo schema della dimostrazione del teorema 6.1 in [2], però si limiterà a considerare il caso di una funzione flusso  $F$  convessa. Tale dimostrazione sarà costruttiva, come anticipato, e farà uso del metodo di *wave front tracking*, (letteralmente “inseguimento dei fronti d’onda”). In pratica, dato  $u_0$  dato iniziale in  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  a variazione totale limitata, si costruirà una successione  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  di soluzioni approssimate costanti a pezzi nel senso della definizione 2.3, soddisfacente le ipotesi del teorema 1.3. Una volta estratta una sottosuccessione convergente in  $\mathbb{L}_{loc}^1$ , la funzione limite risulterà essere la soluzione di (3.1)-(3.2) cercata. Tale soluzione debole entropicamente ammissibile sappiamo già essere unica grazie al teorema 2.4. Prima di occuparci della dimostrazione del risultato principale, studiamo quello che viene chiamato il Problema di Riemann, cioè un problema di Cauchy per (3.1) con dato iniziale  $u_0$  costante a destra e sinistra dell’origine.

## 3.2 Il Problema di Riemann

Chiamiamo *Problema di Riemann* un problema di Cauchy per l'equazione (3.1) in cui il dato iniziale  $u_0$  è del tipo

$$u_0(x) = \begin{cases} u_s & \text{se } x < 0 \\ u_d & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

con  $u_s$  e  $u_d$  assegnati elementi di  $\mathbb{R}$ , che si dicono rispettivamente stato sinistro e stato destro. In questo paragrafo costruiremo esplicitamente l'unica soluzione entropica di (3.1)-(3.6) nel caso in cui la funzione flusso  $F$  sia di classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  e strettamente convessa,

$$F(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) < \alpha F(u_1) + (1 - \alpha)F(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad u_1 \neq u_2, \quad \forall \alpha \in ]0, 1[,$$

e nel caso in cui  $F$  sia una funzione affine. Per la costruzione della soluzione entropicamente ammissibile di un problema di Riemann nel caso di un flusso  $F$  solo localmente lipschitziano, rimandiamo alla letteratura [2, 4].

### 3.2.1 Il caso di un flusso strettamente convesso

Data  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2$  strettamente convessa, e indichiamo con  $G$  l'inversa di  $F'$ , che, essendo  $F'$  monotona, sappiamo esistere definita su tutta la retta reale. Il problema (3.1)-(3.6) è risolto con il seguente teorema.

**Teorema 3.1** *Sia dato il problema di Riemann (3.1)-(3.6), con  $F$  di classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  strettamente convessa. Allora valgono*

1. se  $u_s > u_d$ , l'unica soluzione entropicamente ammissibile di (3.1)-(3.6) è

$$u(x, t) \doteq \begin{cases} u_s & \text{se } x < \lambda t \\ u_d & \text{se } x \geq \lambda t \end{cases} \quad (3.7)$$

dove  $\lambda$  verifica le condizioni di Rankine–Hugoniot, cioè

$$\lambda \doteq \frac{F(u_d) - F(u_s)}{u_d - u_s}; \quad (3.8)$$

2. se  $u_s < u_d$ , l'unica soluzione entropicamente ammissibile di (3.1)-(3.6) è

$$u(x, t) \doteq \begin{cases} u_s & \text{se } x < F'(u_s)t \\ G(x/t) & \text{se } F'(u_s)t \leq x < F'(u_d)t \\ u_d & \text{se } x \geq F'(u_d)t. \end{cases} \quad (3.9)$$



**Dim.** È sufficiente dimostrare che in entrambi i casi 1 e 2 la funzione  $u$  è soluzione entropicamente ammissibile di (3.1)-(3.6), in quanto l'unicità discende direttamente dal teorema 2.4. Si verifica banalmente che  $u$  è limitata, sta in  $\mathcal{C}^0([0, +\infty; \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$  e verifica (3.6) in entrambi i casi 1 e 2. Per dimostrare il punto 1, osserviamo che, poiché  $F$  è strettamente convessa,  $F'$  è monotona e dunque è verificata

$$F'(u_s) > \lambda > F'(u_d).$$

Allora, grazie all'osservazione 2.2 e applicando il teorema 2.3, si ottiene che  $u$  è soluzione debole entropica di (3.1)-(3.6).

Veniamo al punto 2. Per le ipotesi di regolarità di  $F$ ,  $u$  è funzione localmente lipschitziana in  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Inoltre nelle regioni

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\doteq \{(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[: x < F'(u_s)t\}, \\ \Omega_2 &\doteq \{(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[: F'(u_s)t < x < F'(u_d)t\}, \\ \Omega_3 &\doteq \{(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[: x > F'(u_d)t\},\end{aligned}$$

$u$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e soddisfa l'equazione (3.1) in ogni punto. Infatti, in  $\Omega_1$  e  $\Omega_3$  si verifica banalmente perché  $u$  è costante. In  $\Omega_2$  si ha

$$\partial_t u(x, t) = -G' \left( \frac{x}{t} \right) \frac{x}{t^2}, \quad \partial_x F(u(x, t)) = F' \left( G \left( \frac{x}{t} \right) \right) G' \left( \frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} = G' \left( \frac{x}{t} \right) \frac{x}{t^2},$$

essendo  $G$  l'inversa di  $F'$ , e quindi (3.1) è soddisfatta. Per dimostrare che (2.33) è soddisfatta, data una coppia entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$  e fissiamo una funzione  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Applicando il teorema delle divergenze e usando le proprietà di regolarità di  $u$  si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} &= - \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j} [\eta(u)_t + q(u)_x] \varphi \, dxdt \\ &\quad + \int_{x=F'(u_s)t} \langle (q(u_s) - q(u_s), \eta(u_s) - \eta(u_s)), \mathbf{n}_s \rangle \varphi \, dl \\ &\quad + \int_{x=F'(u_d)t} \langle (q(u_d) - q(u_d), \eta(u_d) - \eta(u_d)), \mathbf{n}_d \rangle \varphi \, dl \\ &= - \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j} \eta'(u) [u_t + F'(u)_x] \varphi \, dxdt = 0,\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{n}_s$  e  $\mathbf{n}_d$  indicano le normali alle rette  $x = F'(u_s)t$  e  $x = F'(u_d)t$  dirette da  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  e da  $\Omega_2$  a  $\Omega_3$  rispettivamente. Quindi (2.33) è verificata come uguaglianza.  $\square$

Una soluzione di (3.1)-(3.6) come (3.9) si chiama *onda centrata di rarefazione* o semplicemente *onda di rarefazione*. Corrisponde ad una discontinuità del dato iniziale  $u_0$  in

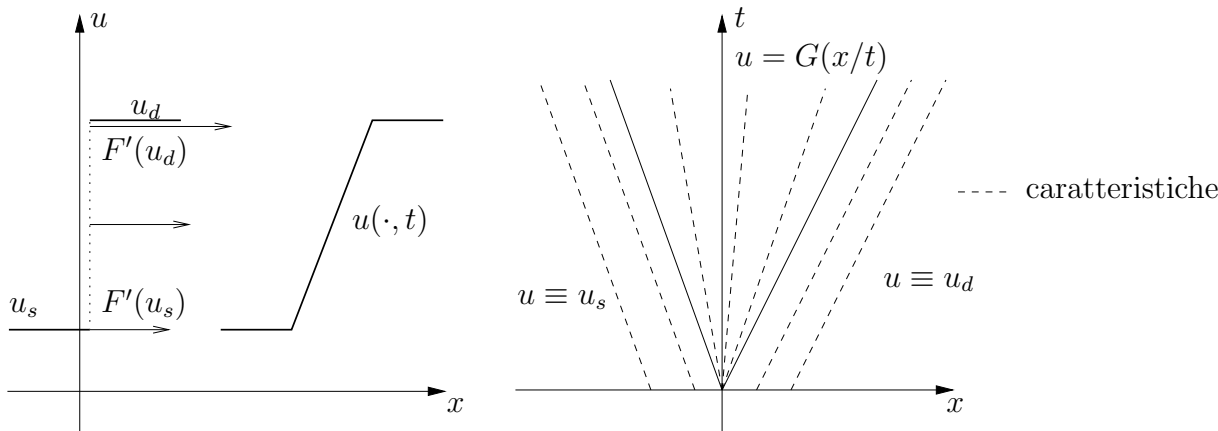


Figura 3.1: Onda di rarefazione

(3.6) che si “rilassa”: infatti se all’istante iniziale  $t = 0$  il profilo  $u(\cdot, 0)$  della soluzione  $u$  è discontinuo, per  $t > 0$   $u(\cdot, t)$  è una funzione lipschitziana (vedi figura 3.1). Si noti che in un’onda di rarefazione  $u_s < u_d$ , e dunque  $F'$  è crescente nell’intervallo  $[u_s, u_d]$ . Quindi la dinamica regolata dall’equazione (3.1) in questo caso fa muovere il punto  $u_d$  più velocemente del punto  $u_s$ , da cui il “rilassamento” del profilo illustrato in figura 3.1. È il fenomeno opposto a quello illustrato risolvendo il problema (2.3)-(2.4) all’inizio del capitolo 2.

### 3.2.2 Il caso di un flusso affine

In questo paragrafo daremo una breve descrizione di come risolvere il problema di Riemann (3.1)-(3.6) nel caso in cui la funzione flusso  $F$  sia affine. Supponiamo quindi che  $F(u) = \lambda u + \mu$ , dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono fissate costanti reali, cosicché  $F'(u) = \lambda = \text{cost.}$  Assegnato un dato iniziale come in (3.6), tutti i punti compresi fra  $u_s$  e  $u_d$  vengono spostati con la stessa velocità  $\lambda$ . Ne segue che l’unica soluzione entropica di (3.1)-(3.6) è una funzione costante a pezzi con un solo salto  $(u_s, u_d)$  che si muove con velocità  $\lambda$ .

**Teorema 3.2** *Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(u) = \lambda u + \mu$ , con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Allora la funzione  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da (3.7) è l’unica soluzione entropica di (3.1)-(3.6).*

**Dim.** L’unicità discende direttamente dal teorema 2.4. Si verifica banalmente che  $u$  è limitata, sta in  $\mathcal{C}^0([0, +\infty; \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$  e verifica (3.6). Inoltre  $u$  è soluzione debole grazie al teorema 2.1 perchè costante a pezzi e le condizioni di Rankine–Hugoniot (2.12) sono banalmente soddisfatte. Poiché (2.19) è verificata come uguaglianza,  $u$  è anche soluzione entropica.  $\square$

In questo caso, la discontinuità  $(u_s, u_d)$  che compare nella soluzione  $u$  di (3.1)-(3.6) si dice *discontinuità di contatto*. Essa è caratterizzata dal fatto che  $F'(u_s) = F'(u_d) = \lambda$  e dunque le caratteristiche sono parallele alla linea di discontinuità  $x(t) = \lambda t$  (vedi figura 3.2).

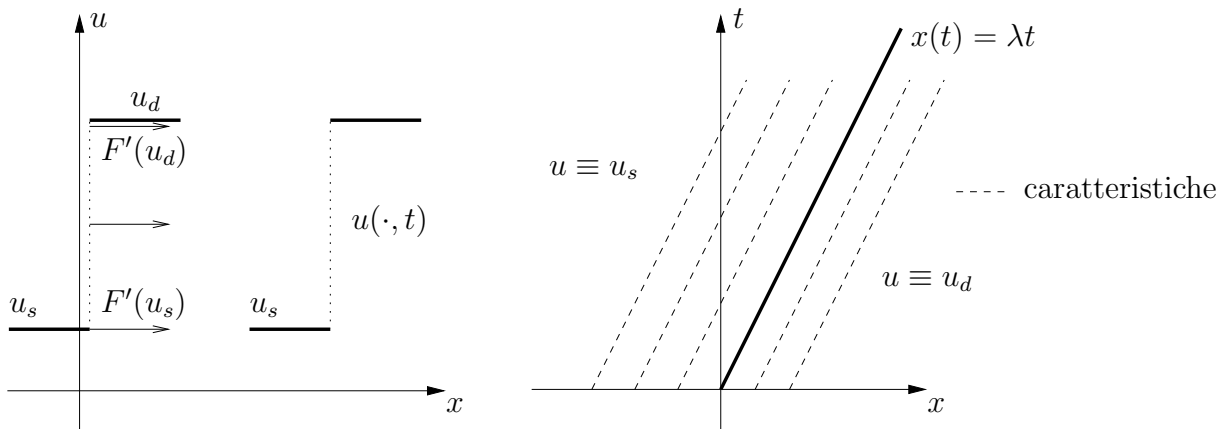


Figura 3.2: Discontinuità di contatto

### 3.3 La costruzione del semigrupp

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo i teoremi principali dell'intero capitolo. Nella dimostrazione del prossimo teorema si costruirà una soluzione di (3.1)-(3.2), almeno nel caso in cui il dato iniziale  $u_0$  sia a variazione totale limitata.

**Teorema 3.3** *Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione localmente lipschitziana e  $u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  a variazione totale limitata. Allora il problema di Cauchy (3.1)-(3.2) ha una soluzione  $u = u(x, t)$  entropicamente ammissibile definita per ogni  $t \geq 0$ . Tale soluzione  $u$  soddisfa*

$$\text{Tot.Var.}(u(\cdot, t)) \leq \text{Tot.Var.}(u_0), \quad \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall t \geq 0, \quad (3.10)$$

ed inoltre vale

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_1 \leq L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot |t - s| \quad \forall t, s \geq 0, \quad (3.11)$$

dove  $L'$  è la costante di Lipschitz di  $F$  nell'intervallo  $[-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty]$ .

**Dim.** Come anticipato, faremo la dimostrazione supponendo  $F$  convessa. Sia  $M = \|u_0\|_\infty$ . Grazie al lemma 1.4, esiste una successione  $\{u_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  di funzioni costanti a tratti tali che

- i)  $u_{0\nu}$  prende valori in  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ ;
- ii)  $\|u_0 - u_{0\nu}\|_1 \rightarrow 0$  per  $\nu \rightarrow +\infty$ ;
- iii)  $\text{Tot.Var.}(u_{0\nu}) \leq \text{Tot.Var.}(u_0)$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ ;
- iv)  $\|u_{0\nu}\|_\infty \leq M$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ .

La dimostrazione è divisa in tre passi:

1. Passo 1: si costruisce soluzione approssimata di un problema di Riemann, costante a pezzi nel senso della definizione 2.3;
2. Passo 2: fissato un dato iniziale approssimato  $u_{0\nu}$ , a partire da questo si costruisce una soluzione approssimata  $u_\nu$  costante a pezzi del problema di Cauchy (3.1)-(3.2);
3. Passo 3: costruita la successione  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  come al Passo 2, da questa si estrae una sottosuccessione convergente all'unica soluzione entropicamente ammissibile di (3.1)-(3.2).

Naturalmente, qui e nel seguito, per “soluzione” si intende una soluzione debole entropicamente ammissibile.

**Passo 1.** Consideriamo un dato iniziale  $u(x, 0) = \bar{u}$  definito da

$$u(x, 0) = \bar{u}(x) \doteq \begin{cases} \omega_s & \text{se } x < 0 \\ \omega_d & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

con  $\omega_s, \omega_d \in 2^{-\nu}\mathbb{Z}$ . Per costruire una soluzione approssimata costante a tratti di un problema di Riemann, il problema principale è come trattare le onde di rarefazione, e quindi come approssimare una funzione lipschitziana con una costante a tratti che sia una buona approssimazione della soluzione di (3.1)-(3.12). Per fare questo, consideriamo una funzione  $F_\nu$  continua e affine a tratti che coincide con  $F$  sull'insieme  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ . In formule  $F_\nu$  è definita come segue (vedi figura 3.3)

$$F_\nu(u) = F(2^{-\nu}j) + \frac{F(2^{-\nu}(j+1)) - F(2^{-\nu}j)}{2^{-\nu}}(u - 2^{-\nu}j), \quad \forall u \in [2^{-\nu}j, 2^{-\nu}(j+1)]. \quad (3.13)$$

Si osservi che  $F_\nu$  è funzione convessa per costruzione, essendo tale  $F$ , ed inoltre, grazie all'Osservazione 1.1, vale

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} F'_\nu(u) = F'(u) \quad \text{per q.o. } u \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

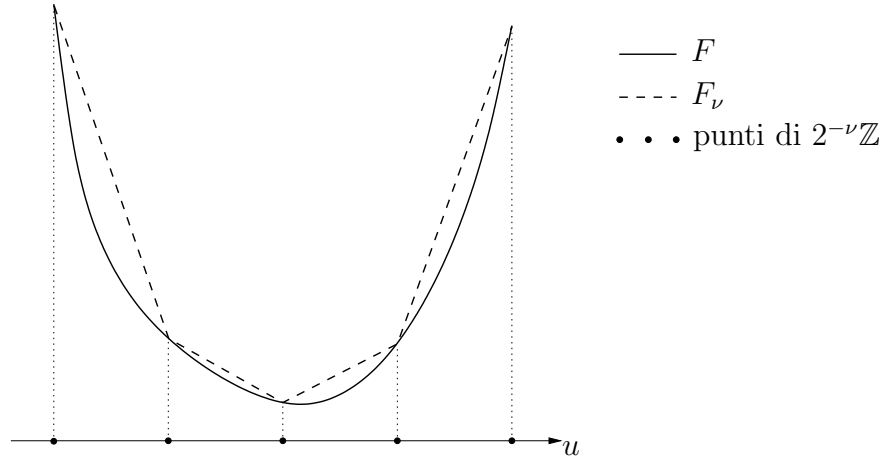
ed inoltre

$$\|F'_\nu\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} \leq \|F'\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} \quad \text{per ogni compatto } K \subset \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Costruiamo ora la soluzione debole entropica  $u_{app}$  del problema di Riemann per l'equazione

$$u_t + F_\nu(u)_x = 0 \quad (3.16)$$

con il dato iniziale  $\bar{u}$  fissato. Come nella dimostrazione del teorema 3.1, considereremo due casi.

Figura 3.3: L'approssimante  $F_\nu$ 

CASO 1:  $\omega_s > \omega_d$ .

Come si deduce dal teorema 3.1, in questo caso la soluzione entropica di (3.1)-(3.6) consiste in uno shock che si muove con la velocità dettata dalle condizioni di Rankine-Hugoniot (2.12). Anche la struttura di  $u_{app}$  sarà la stessa, e dunque

$$u_{app}(x, t) = \begin{cases} \omega_s & \text{se } x < \frac{F_\nu(\omega_d) - F_\nu(\omega_s)}{\omega_d - \omega_s} t \\ \omega_d & \text{se } x \geq \frac{F_\nu(\omega_d) - F_\nu(\omega_s)}{\omega_d - \omega_s} t. \end{cases} \quad (3.17)$$

(3.17) definisce una soluzione debole entropica di (3.16)–(3.12). Infatti, si verifica banalmente che  $u_{app} \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$  e soddisfa la condizione iniziale. Per dimostrare che è soluzione entropica di (3.16), è sufficiente far vedere che  $u_{app}$  soddisfa la definizione 2.5 con  $F_\nu$  al posto di  $F$ . Le condizioni di Rankine-Hugoniot sono banalmente soddisfatte. Riguardo a (2.19), osserviamo che, essendo  $F_\nu$  convessa, fissato  $u^*$ , la funzione rapporto incrementale

$$u \mapsto \frac{F_\nu(u) - F_\nu(u^*)}{u - u^*}, \quad u \neq u^*,$$

è crescente, e quindi, se  $\omega_d < u^* < \omega_s$ , vale

$$\frac{F_\nu(\omega_s) - F_\nu(u^*)}{\omega_s - u^*} \geq \frac{F_\nu(\omega_d) - F_\nu(u^*)}{\omega_d - u^*},$$

che è (2.19) con  $F_\nu$  al posto di  $F$ ,  $u_s = \omega_s$  e  $u_d = \omega_d$ .

CASO 2:  $\omega_s < \omega_d$ .

Il teorema 3.1 ci dice che la soluzione  $u$  di (3.1)-(3.6) è data da (3.9) e consiste di un'onda di rarefazione. La soluzione  $u_{app}$  di (3.16)–(3.12) consiste invece di al più  $N \doteq (\omega_d - \omega_s) \cdot 2^\nu$  shocks di ampiezza  $2^{-\nu}$  che viaggiano con velocità crescenti. Più precisamente, definiamo

$$\omega_j = \omega_s + 2^{-\nu} j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.18)$$

e si osservi che  $\omega_0 = \omega_s$ ,  $\omega_N = \omega_d$  e  $\omega_s < \omega_1 < \dots < \omega_{N-1} < \omega_d$ . Si ottiene

$$u_{app}(x, t) = \begin{cases} \omega_s & \text{se } x < \frac{F_\nu(\omega_1) - F_\nu(\omega_s)t}{\omega_1 - \omega_s} \\ \omega_j & \text{se } \frac{F_\nu(\omega_j) - F_\nu(\omega_{j-1})t}{\omega_j - \omega_{j-1}} \leq x < \frac{F_\nu(\omega_{j+1}) - F_\nu(\omega_j)t}{\omega_{j+1} - \omega_j}, \\ & j = 1, \dots, N-1 \\ \omega_d & \text{se } x \geq \frac{F_\nu(\omega_d) - F_\nu(\omega_{N-1})t}{\omega_d - \omega_{N-1}}. \end{cases} \quad (3.19)$$

In pratica, l'onda di rarefazione di cui consiste la soluzione  $u$  di (3.1)-(3.6) è spezzata in al più  $N$  shocks  $(\omega_j, \omega_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , ciascuno di ampiezza  $2^{-\nu}$  (vedi figura 3.4). Essi viaggiano tutti con la velocità data dalle condizioni di Rankine–Hugoniot.

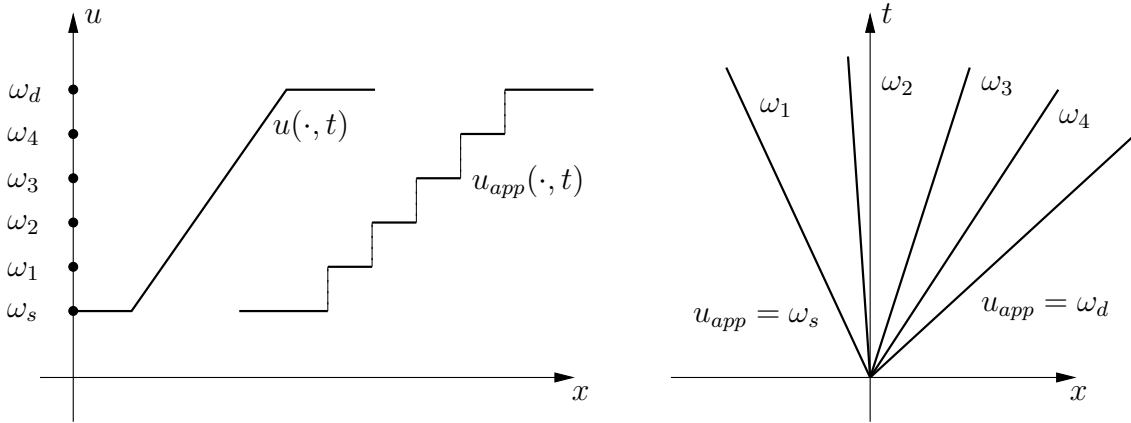


Figura 3.4: Approssimazione di un'onda di rarefazione

Inoltre, poiché  $F_\nu(\omega_j) = F(\omega_j)$  per ogni  $j$ ,  $(\omega_j, \omega_{j+1})$  è uno shock (non entropicamente ammissibile) anche per (3.1). Invece, grazie al teorema 2.3,  $u_{app}$  è soluzione debole entropica di (3.16)–(3.12). Banalmente  $u_{app}$  verifica la condizione iniziale e appartiene a  $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$ . Inoltre  $u_{app}$  verifica le ipotesi del teorema 2.3 ed è

dunque soluzione entropica di (3.16). Infatti, è costante a pezzi con al più  $N$  fronti d'onda non interagenti; lungo ciascun fronte d'onda sono verificate le condizioni di Rankine–Hugoniot, e, poiché  $F_\nu$  è affine su ciascun intervallo  $[\omega_j, \omega_{j+1}]$ , si ha

$$\frac{F_\nu(u^*) - F_\nu(\omega_j)}{u^* - \omega_j} = \frac{F_\nu(\omega_{j+1}) - F_\nu(u^*)}{\omega_{j+1} - u^*} = \frac{F_\nu(\omega_{j+1}) - F_\nu(\omega_j)}{\omega_{j+1} - \omega_j} \quad \forall u^* \in ]\omega_j, \omega_{j+1}[,$$

cioè (2.19) vale come uguaglianza.

Si osservi che in ogni caso vale

$$\min\{\omega_s, \omega_d\} \leq u_{app}(x, t) \leq \max\{\omega_s, \omega_d\} \quad \forall (x, t). \quad (3.20)$$

Infatti, per costruzione i valori assunti da  $u_{app}$  sono contenuti nell'intervallo di estremi  $\omega_s$  e  $\omega_d$ .

**Passo 2.** Fissato  $u_{0\nu}$ , vogliamo costruire una soluzione  $u_\nu$  del problema di Cauchy per (3.16) di dato iniziale  $u_{0\nu}$ . Siano  $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$  i punti di discontinuità di  $u_{0\nu}$ . In ogni punto  $x_i$  risolviamo il problema di Riemann con stati sinistro e destro rispettivamente  $\omega_s = u_{0\nu}(x_i^-)$  e  $\omega_d = u_{0\nu}(x_i^+)$  come al passo 1, con chiaro significato dei simboli. Questo è possibile farlo perché  $u_{0\nu}$  prende valori in  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ . In questo modo costruiamo  $u_\nu$  per tempi  $t$  più piccoli di un certo istante  $t_1$  dove due o più fronti d'onda interagiscono. Risolviamo nel punto di intersezione il nuovo problema di Riemann e prolunghiamo ancora  $u_\nu$  fino ad un certo istante  $t_2 \geq t_1$  dove alcuni shocks ancora interagiscono tra loro. Risolviamo di nuovo il problema di Riemann nel punto di interazione, e proseguiamo in questo modo (vedi figura 3.5). Per dimostrare che possiamo continuare con questo procedimento definendo  $u_\nu$

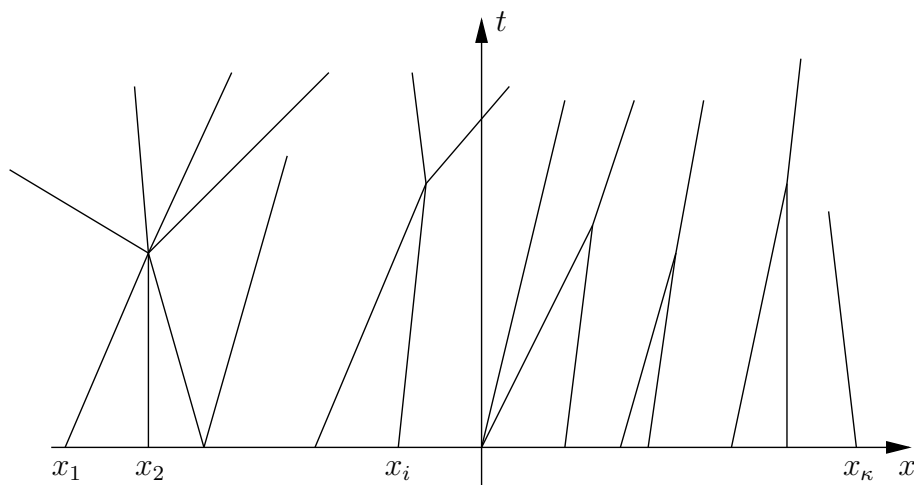


Figura 3.5: Il metodo di wave front tracking

per ogni  $t \geq 0$ , è sufficiente dimostrare che il numero totale di interazioni fra fronti d'onda è finito. Per farlo, supponiamo che

$$\xi_1(t) < \xi_2(t) < \cdots < \xi_m(t), \quad t < \tau,$$

siano le posizioni all'istante  $t$  di  $m$  linee di discontinuità che si intersecano nello stesso punto  $\xi \in \mathbb{R}$  ad un certo istante  $\tau$ . Chiamiamo  $u_{i-1}$  e  $u_i$  i valori di  $u_\nu$  rispettivamente a sinistra e destra di  $\xi_i(t)$ , cosicché valgono

$$u_i - u_{i-1} = u_\nu(\xi_i(t)+) - u_\nu(\xi_i(t)-), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

Possono capitare due casi.

**CASO 1:** tutti i salti in (3.21) hanno lo stesso segno. In questo caso il problema di Riemann con stati sinistro e destro rispettivamente  $u_0$  e  $u_m$  è risolto da un singolo salto. Infatti, osserviamo innanzitutto che deve essere  $u_i - u_{i-1} < 0$  per ogni  $i$ . In caso contrario, da (3.19) e dal fatto che  $F_\nu$  è convessa, si deduce che

$$\dot{\xi}_{i+1} = \frac{F_\nu(u_{i+1}) - F_\nu(u_i)}{u_{i+1} - u_i} \geq \frac{F_\nu(u_i) - F_\nu(u_{i-1})}{u_i - u_{i-1}} = \dot{\xi}_i(t),$$

per  $t < \tau$ , per cui  $\xi_{i+1}$  e  $\xi_i$  non possono intersecarsi. Allora si ha  $u_0 > u_m$ , e dunque, grazie al Caso 1 del passo 1 il corrispondente problema di Riemann è risolto da un singolo shock. Ne segue che il numero totale di fronti d'onda decresce almeno di 1. La variazione totale, invece, rimane invariata. Infatti, denotando con  $x_1(t), \dots, x_\kappa(t)$  gli ulteriori punti di salto di  $u(\cdot, t)$  all'istante  $t < \tau$ , oltre a  $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$ , si ha, con ovvio significato dei simboli,

$$\begin{aligned} \text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, \tau-)) &= \sum_{i=1}^{\kappa} |u_\nu(x_i+, \tau) - u_\nu(x_i-, \tau)| + \sum_{j=1}^m |u_j - u_{j-1}| \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} |u_\nu(x_i+, \tau) - u_\nu(x_i-, \tau)| + \left| \sum_{j=1}^m [u_j - u_{j-1}] \right| \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} |u_\nu(x_i+, \tau) - u_\nu(x_i-, \tau)| + |u_0 - u_m| \\ &= \text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, \tau+)). \end{aligned}$$

**CASO 2:** i salti in (3.21) non hanno tutti lo stesso segno. In questo caso la variazione totale di  $u_\nu(\cdot, t)$  diminuisce all'istante  $\tau$  almeno della quantità  $2 \cdot 2^{-\nu}$  (vedi figura 3.6). Per fissare le idee, supponiamo sia  $u_m > u_0$ . Si ottiene

$$|u_m - u_0| = \sum_{j=1}^m u_j - u_{j-1} = \sum_{j=1}^m (u_j - u_{j-1})^+ - \sum_{j=1}^m (u_j - u_{j-1})^-,$$



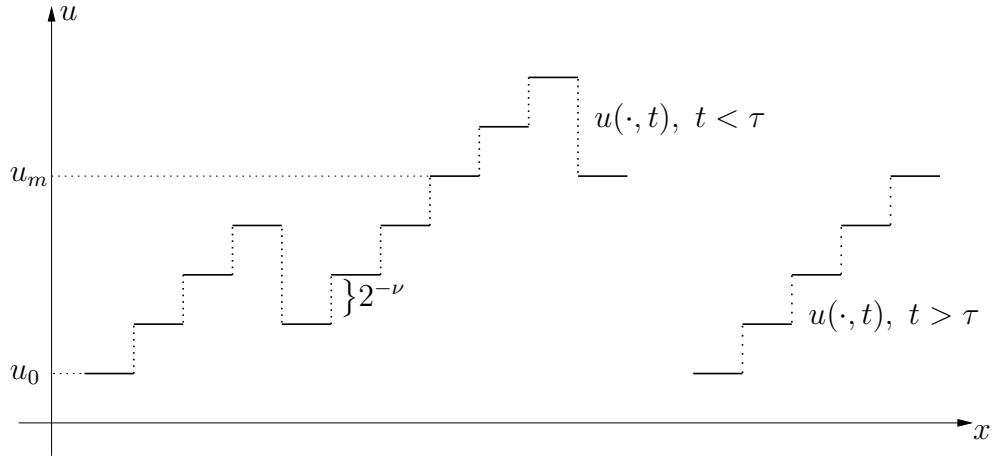


Figura 3.6: Il Caso 2

dove  $(a)^+ = \max\{a, 0\}$  e  $(a)^- = \max\{-a, 0\}$  per ogni numero reale  $a$ . Inoltre vale

$$\sum_{j=1}^m |u_j - u_{j-1}| = \sum_{j=1}^m (u_j - u_{j-1})^+ + \sum_{j=1}^m (u_j - u_{j-1})^-$$

da cui si deduce

$$u_m - u_0 - \sum_{j=1}^m |u_j - u_{j-1}| = -2 \sum_{j=1}^m (u_j - u_{j-1})^-. \quad (3.22)$$

Poiché per costruzione  $(u_j - u_{j-1})^- = 2^{-\nu}$  per qualche  $j$ , da (3.22) si ottiene

$$\text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, \tau+)) \leq \text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, \tau-)) - 2 \cdot 2^{-\nu},$$

come si voleva.

Poiché la variazione totale di  $u_\nu(\cdot, t)$  all'istante iniziale è finita e nel Caso 1 non aumenta, la situazione descritta al Caso 2 può capitare solo un numero finito di volte. Quindi, siccome nel Caso 1 il numero totale di fronti d'onda diminuisce, tale numero rimane finito e uniformemente limitato per ogni  $t \geq 0$  e la stessa cosa accade del numero di interazioni. Quindi  $u_\nu$  è definita per ogni  $t \geq 0$  e, grazie al teorema 2.3, è soluzione entropica di (3.16). Infatti,  $u_\nu$  è costante a pezzi con discontinuità lungo un numero finito di poligoni che si intersecano un numero finito di volte, e lungo ogni linea di discontinuità sono verificate le condizioni di Rankine–Hugoniot e la condizione di entropia (2.19), grazie a quanto dimostrato al Passo 1. Inoltre  $u_\nu$  verifica

$$\text{Tot.Var.}(u_\nu(\cdot, t)) \leq \text{Tot.Var.}(u_{0\nu}) \leq \text{Tot.Var.}(u_0) \quad \forall t \geq 0, \quad (3.23)$$

e, per costruzione, si ha

$$\|u_\nu(\cdot, t)\|_\infty \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad (3.24)$$

per ogni  $t \geq 0$ , dove  $M = \|u_0\|_\infty$  è la costante introdotta all'inizio della dimostrazione. Infatti, grazie a (3.20), la stima (3.24) è vera fino al primo istante di interazione  $t_1$ . Supponiamo sia vera per  $t < t_i$ , dove  $t_i$  è l' $i$ -esimo istante di interazione. Se  $u_0, \dots, u_m$  sono definiti come in (3.21), con  $\xi(\cdot), \dots, \xi_m(\cdot)$  relativi all'istante  $t_i$ , allora per costruzione (vedi Passo 1), la soluzione del problema di Riemann con dati sinistro e destro  $u_0$  e  $u_m$  prende valori nell'intervallo di estremi  $u_0$  e  $u_m$ , e dunque (3.24) continua a essere vera per  $t_i < t < t_{i+1}$ . Invocando il Principio di Induzione, si ottiene che (3.24) è vera per ogni  $t$ .

**Passo 3.** Per estrarre da  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  una sottosuccessione convergente, ci serviamo del teorema 1.3. Osserviamo che grazie a (3.23) e (3.24) l'ipotesi (1.10) è verificata, e quindi resta da dimostrare che anche (1.11) è vera. Sia  $L'$  una costante di Lipschitz per  $F$  (e quindi anche per  $F_\nu$ ) nell'intervallo  $[-M, M]$ , e siano  $t_1 < t_2 < \dots < t_\kappa$  gli istanti in cui due o più fronti d'onda di  $u_\nu$  interagiscono e poniamo  $t_0 = 0$ . Dimostriamo dapprima (1.11) per due istanti  $t$  e  $s$  tali che  $t_i < s < t < t_{i+1}$ , con  $t_i$  fissato. Siano  $\xi_1(\tau) < \xi_2(\tau) < \dots < \xi_m(\tau)$  le posizioni all'istante  $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$  dei fronti d'onda di  $u_\nu$ . Si osservi che, poiché per costruzione gli shocks di  $u_\nu$  soddisfano le condizioni di Rankine–Hugoniot relative all'equazione (3.16), si ha  $|\dot{\xi}_j(\tau)| \leq L'$  per ogni  $j$  e  $\tau$ , da cui

$$|\xi_j(\bar{t}) - \xi_j(\bar{s})| \leq L'|\bar{t} - \bar{s}| \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \forall \bar{s}, \bar{t}. \quad (3.25)$$

Inoltre,  $u_\nu(x, \tau) = 0$  per  $x < \xi_1(\tau)$  e  $x > \xi_m(\tau)$ , essendo  $u_\nu(\cdot, \tau)$  funzione di  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  costante a tratti e a variazione totale limitata. Dati  $\bar{s}, \bar{t} \in [s, t]$ ,  $\bar{s} < \bar{t}$ , definiamo gli intervalli  $\mathcal{I}_j(\bar{s}, \bar{t})$

$$\mathcal{I}_j(\bar{s}, \bar{t}) \doteq ] \min\{\xi_j(\bar{s}), \xi_j(\bar{t})\}, \max\{\xi_j(\bar{s}), \xi_j(\bar{t})\} [, \quad j = 1, \dots, m,$$

di estremi  $\xi_j(\bar{s})$  e  $\xi_j(\bar{t})$ . Per costruzione (vedi figura 3.7) vale

$$u_\nu(x, \bar{t}) = u_\nu(x, \bar{s}) \quad \forall x \notin \mathcal{I}_j(\bar{s}, \bar{t}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Dati  $\bar{s}$  e  $\bar{t}$  come sopra, supponiamo che gli intervalli  $\mathcal{I}_j(\bar{s}, \bar{t})$  siano a due a due disgiunti. Usando (3.23) e (3.25), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, \bar{t}) - u_\nu(x, \bar{s})| dx &= \int_{\cup_j \mathcal{I}_j} |u_\nu(x, \bar{t}) - u_\nu(x, \bar{s})| dx + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup_j \mathcal{I}_j} |u_\nu(x, \bar{t}) - u_\nu(x, \bar{s})| dx \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{I}_j} |u_\nu(x, \bar{t}) - u_\nu(x, \bar{s})| dx \\ &= \sum_{j=1}^m |u_\nu(\xi_j(\bar{t})-, \bar{t}) - u_\nu(\xi_j(\bar{t})+, \bar{t})| |\xi_j(\bar{t}) - \xi_j(\bar{s})| \end{aligned}$$

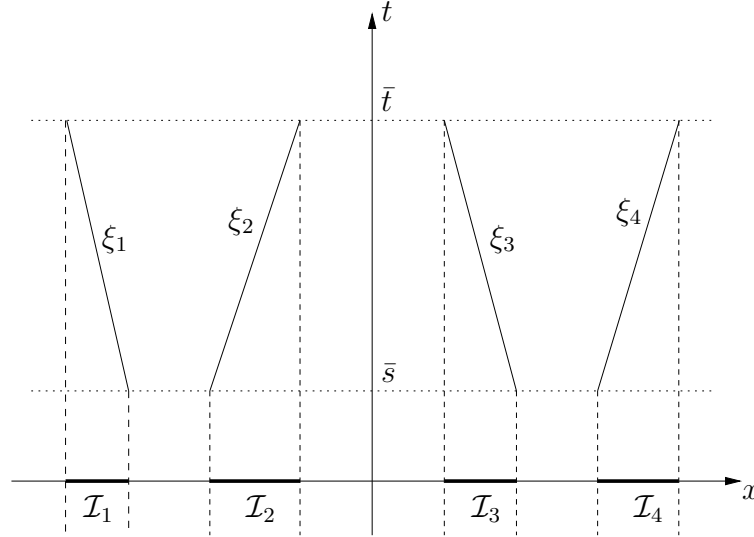


Figura 3.7: Gli intervalli  $\mathcal{I}_j$  tra  $\bar{s}$  e  $\bar{t}$

$$\begin{aligned}
 &\leq L' \cdot |\bar{t} - \bar{s}| \cdot \sum_{j=1}^m |u_\nu(\xi_j(\bar{t})-, \bar{t}) - u_\nu(\xi_j(\bar{t})+, \bar{t})| \\
 &\leq L' \cdot |\bar{t} - \bar{s}| \cdot \text{Tot.Var.}(u_0).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Si osservi poi che, poiché nell'intervallo  $[s, t]$  i fronti d'onda di  $u_\nu$  non interagiscono, è sempre possibile trovare  $s = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\kappa = t$  tali che per ogni  $i$  gli intervalli  $\mathcal{I}_j(\tau_i, \tau_{i+1})$  siano a due a due disgiunti (vedi figura 3.8). Usando (3.26) in ogni intervallo  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ , e quindi con  $\bar{s} = \tau_i$  e  $\bar{t} = \tau_{i+1}$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t) - u_\nu(x, s)| dx &\leq \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, \tau_{i+1}) - u_\nu(x, \tau_i)| dx \\
 &\leq L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot \sum_{i=0}^{\kappa-1} (\tau_{i+1} - \tau_i) \\
 &= L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot |t - s|,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Si noti che da (3.27) passando al limite per  $s \rightarrow t_i$  e  $t \rightarrow t_{i+1}$  e osservando che  $u_\nu \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{L}^1(\mathbb{R}))$  per costruzione, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t_{i+1}) - u_\nu(x, t_i)| dx \leq L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot |t_{i+1} - t_i|. \tag{3.28}$$

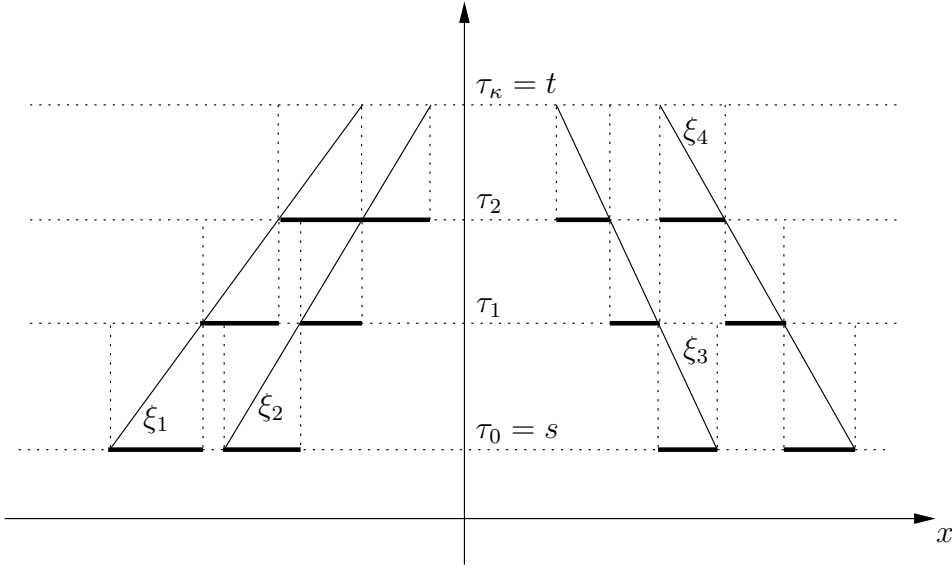


Figura 3.8: Gli istanti  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_\kappa$

Supponiamo ora  $t, s \geq 0$ ,  $s < t$ . Siano  $t_i$  e  $t_j$ ,  $i \leq j$ , tali che  $t_{\ell-1} < s \leq t_\ell$  e  $t_{m-1} < t \leq t_m$ . Usando (3.27) in  $[s, t_\ell]$  e in  $[t_{m-1}, t]$ , e (3.28) in ogni intervallo  $[t_{k-1}, t_k]$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t) - u_\nu(x, s)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t) - u_\nu(x, t_{m-1})| dx \\
 &\quad + \sum_{k=\ell+1}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t_k) - u_\nu(x, t_{k-1})| dx \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} |u_\nu(x, t_\ell) - u_\nu(x, s)| dx \\
 &\leq L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot \left( t - t_{m-1} + \sum_{k=\ell+1}^{m-1} (t_k - t_{k-1}) + t_\ell - s \right) \\
 &= L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0) \cdot |t - s|,
 \end{aligned}$$

e dunque vale (1.11) con  $L = L' \cdot \text{Tot.Var.}(u_0)$ . Quindi grazie al teorema 1.3, possiamo estrarre una sottosuccessione  $\{u_{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergente in  $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  ad una funzione  $u$  per cui vale (3.10). Inoltre, da (1.12) si deduce (3.11). Da questa discende che  $u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}))$ . Inoltre  $u(x, 0) = u_0(x)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}$  grazie alla convergenza di  $\{u_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  a  $u_0$  in  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ . Per dimostrare che  $u$  è soluzione entropicamente ammissibile di (3.1)-(3.2), fissata una coppia entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$  per (3.1) e una funzione

$\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  con  $\varphi \geq 0$ , dobbiamo dimostrare che vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x\} dxdt \geq 0. \quad (3.29)$$

Osserviamo che, data  $\eta$  la funzione  $q_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q_\nu(u) \doteq q(-M) + \int_{-M}^u \eta'(w)F'_\nu(w) dw \quad (3.30)$$

è tale per cui  $(\eta, q_\nu)$  è una coppia entropia–flusso di entropia per (3.16). Poiché  $u_\nu$  è soluzione entropica di tale equazione, vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\eta(u_{\nu_j})\varphi_t + q_\nu(u_{\nu_j})\varphi_x\} dxdt \geq 0 \quad (3.31)$$

Cerchiamo di passare al limite in (3.31) per  $j \rightarrow +\infty$  e ottenere (3.29).

Poiché  $\varphi_t$  è limitata e  $\eta$  lipschitziana in  $[-M, M]$  dove  $u_{\nu_j}$  e  $u$  prendono valori, esistono delle costanti  $C_1, C_2 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u_{\nu_j})\varphi_t dxdt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u)\varphi_t dxdt \right| \\ & \leq C_1 \iint_{\text{supp } \varphi_t} |\eta(u_{\nu_j}) - \eta(u)| dxdt \leq C_1 C_2 \iint_{\text{supp } \varphi_t} |u_{\nu_j} - u| dxdt, \end{aligned}$$

da cui, tenuto conto che  $u_{\nu_j} \rightarrow u$  in  $\mathbb{L}_{loc}^1$  e  $\text{supp } \varphi_t$  è compatto, si ottiene

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u_{\nu_j})\varphi_t dxdt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u)\varphi_t dxdt. \quad (3.32)$$

Si osservi ora che la funzione  $q_\nu$  definita in (3.30) è lipschitziana nell'intervallo  $[-M, M]$ , con costante di Lipschitz indipendente da  $\nu$ . Allora, poiché lo stesso flusso di entropia  $q$  è lipschitziano in  $[-M, M]$  e  $\varphi_x$  è limitata, esistono delle costanti  $C_3, C_4 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\nu_j}(u_{\nu_j}) \varphi_x dxdt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(u)\varphi_x dxdt \right| \leq C_3 \iint_{\text{supp } \varphi_x} |q_{\nu_j}(u_{\nu_j}) - q(u)| dxdt \\ & \leq C_3 \iint_{\text{supp } \varphi_x} |q_{\nu_j}(u_{\nu_j}) - q(u_{\nu_j})| dxdt + C_3 \iint_{\text{supp } \varphi_x} |q(u_{\nu_j}) - q(u)| dxdt \\ & \leq C_3 \iint_{\text{supp } \varphi_x} |q_{\nu_j}(u_{\nu_j}) - q(u_{\nu_j})| dxdt + C_3 C_4 \iint_{\text{supp } \varphi_x} |u_{\nu_j} - u| dxdt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Grazie a (3.14)-(3.15) si ha che  $q_\nu \rightarrow q$  uniformemente su  $[-M, M]$ . Allora, siccome  $u_{\nu_j} \rightarrow u$  in  $\mathbb{L}_{loc}^1$  e  $\text{supp } \varphi_x$  è compatto, da (3.33) si ottiene

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(u_{\nu_j}) \varphi_x \, dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(u) \varphi_x \, dx dt. \quad (3.34)$$

Quindi, grazie a (3.32) e (3.34), si può passare al limite in (3.31) per  $j \rightarrow +\infty$  e ottenere (3.29).  $\square$

**Osservazione 3.1** Si noti che, grazie al teorema 2.4 di unicità della soluzione di (3.1)-(3.2) con dato iniziale in  $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ , la successione  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  di soluzioni approssimate costruita al Passo 2 della dimostrazione precedente converge tutta intera, e non solo a meno di sottosuccessioni, in  $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  alla soluzione  $u$  di (3.1)-(3.2).

Il prossimo teorema risolve il problema enunciato all'inizio del capitolo circa l'esistenza di un semigruppato  $\mathcal{S}$  soddisfacente (3.3)-(3.5).

**Teorema 3.4** *Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione localmente lipschitziana. Allora esiste un semigruppato continuo  $\mathcal{S} : [0, +\infty[ \times \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  soddisfacente (3.3)-(3.5) e*

$$\|\mathcal{S}_t u_0 - \mathcal{S}_t v_0\|_1 \leq \|u_0 - v_0\|_1 \quad \forall u_0, v_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}). \quad (3.35)$$

*Inoltre, se  $u_0(x) \leq v_0(x)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $\mathcal{S}_t u_0(x) \leq \mathcal{S}_t v_0(x)$  per ogni  $t \geq 0$  e per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Dim.** Definiamo la mappa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} : [0, +\infty[ \times \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R}) \\ (t, u_0) &\longmapsto \tilde{\mathcal{S}}_t u_0 \doteq u(\cdot, t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove  $u$  è la soluzione entropica di (3.1)-(3.2) di cui il teorema 3.3 garantisce l'esistenza. Grazie al teorema 2.4  $\tilde{\mathcal{S}}$  è ben definita e soddisfa

$$\|\tilde{\mathcal{S}}_t u_0 - \tilde{\mathcal{S}}_t v_0\|_1 \leq \|u_0 - v_0\|_1, \quad (3.37)$$

per ogni coppia di funzioni  $u_0, v_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R})$  e dunque è lipschitziana nella variabile di  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R})$ . Inoltre  $\tilde{\mathcal{S}}$  è continua in  $t$  grazie a (3.11). Per costruzione soddisfa  $\tilde{\mathcal{S}}_0 u_0 = u_0$  per ogni  $u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R})$ , e grazie al teorema 2.4 di unicità e alla continuità in  $t$  soddisfa anche  $\tilde{\mathcal{S}}_s(\tilde{\mathcal{S}}_t u_0) = \tilde{\mathcal{S}}_{s+t} u_0$ . Poiché  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{BV}(\mathbb{R})$  è denso in  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  grazie al lemma 1.4,  $\tilde{\mathcal{S}}$  può essere estesa per continuità ad una mappa continua  $\mathcal{S} : [0, +\infty[ \times \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  soddisfacente (3.3), (3.4) e (3.35). Dimostriamo che  $\mathcal{S}$  soddisfa (3.5). Poiché valgono (3.3) e (3.35) è sufficiente dimostrare che, fissato  $u_0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_{(\cdot)} u_0$  è soluzione

entropicamente ammissibile di (3.1) nel senso della definizione 2.7. Grazie ai lemmi 1.3 e 1.4, esiste una successione  $\{u_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  di funzioni a variazione totale limitata convergente in  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  a  $u_0$  e tale che  $\|u_{0\nu}\|_\infty \leq M \doteq \|u_0\|_\infty$  per ogni  $\nu$ . Per costruzione, la funzione  $\mathcal{S}_{(\cdot)}u_{0\nu}$  prende valori in  $[-M, M]$ . Inoltre, (3.35) implica che  $\{\mathcal{S}_{(\cdot)}u_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge in  $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  a  $\mathcal{S}_t u_0$ . Allora, con un procedimento del tutto simile a quello utilizzato per dimostrare (3.29), si dimostra che vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \eta(\mathcal{S}_t u_0) \varphi_t + q(\mathcal{S}_t u_0) \varphi_x \right\} dx dt \geq 0$$

per ogni funzione  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  e ogni coppia entropia-flusso di entropia  $(\eta, q)$ , e dunque  $\mathcal{S}_{(\cdot)}u_0$  è soluzione entropicamente ammissibile di (3.1).

Per provare l'ultimo asserto del teorema, come nella dimostrazione del teorema 3.3, supporremo  $F$  convessa. Per le proprietà di continuità di  $\mathcal{S}$ , ci possiamo ricondurre al caso in cui  $u_0$  e  $v_0$  sono a variazione totale limitata. Procedendo come nella dimostrazione del teorema 3.3, siano  $\{u_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{v_{0\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  due successioni di funzioni costanti a tratti a valori in  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$  convergenti in  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$  rispettivamente a  $u_0$  e  $v_0$ , e siano  $u_\nu$  e  $v_\nu$  le soluzioni deboli entropiche di (3.16) con dato iniziale rispettivamente  $u_{0\nu}$  e  $v_{0\nu}$ . A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  convergano in  $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$  rispettivamente a  $\mathcal{S}_{(\cdot)}u_0$  e  $\mathcal{S}_{(\cdot)}v_0$ . A questo punto per concludere la dimostrazione del teorema è sufficiente provare che  $u_\nu(x, t) \leq v_\nu(x, t)$  per ogni  $t > 0$  e  $\nu \in \mathbb{N}$  e q.o.  $x \in \mathbb{R}$ . Per farlo, grazie a come sono costruite  $u_\nu$  e  $v_\nu$ , basta far vedere che tale proprietà è vera per un problema di Riemann. Consideriamo allora due problemi di Riemann per (3.16) con dati iniziali

$$u_0(x) \doteq \begin{cases} u_s & \text{se } x < 0 \\ u_d & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad v_0(x) \doteq \begin{cases} v_s & \text{se } x < 0 \\ v_d & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

con  $u_s, u_d, v_s, v_d \in 2^{-\nu}\mathbb{Z}$  e tali che  $u_s \leq v_s$  e  $u_d \leq v_d$ . Possiamo ricadere in tre casi

CASO 1:  $\max\{u_s, u_d\} \leq \min\{v_s, v_d\}$ .

In questo caso, grazie a (3.20) vale

$$u(x, t) \leq \max\{u_s, u_d\} \leq \min\{v_s, v_d\} \leq v(x, t),$$

per ogni  $(x, t)$ .

CASO 2:  $u_s \leq v_s \leq u_d \leq v_d$ .

I due problemi di Riemann  $(u_s, u_d)$  e  $(v_s, v_d)$  sono risolti come in (3.18)-(3.19). Siano allora  $\omega_0, \dots, \omega_N$  dati da

$$\omega_j = u_s + 2^{-\nu}j, \quad j = 0, \dots, N, \quad \omega_N = v_d.$$

Allora  $v_s = \omega_{k_v}$  e  $u_d = \omega_{k_u}$  per qualche  $k_v \leq k_u$  tra 0 e  $N$ . Allora, per (3.19) e grazie alla convessità di  $F_\nu$ , vale

$$\begin{aligned} x < \frac{F_\nu(\omega_{k_v+1}) - F_\nu(v_s)}{\omega_{k_v+1} - v_s} t &\Rightarrow u(x, t) \leq v_s = v(x, t), \\ \frac{F_\nu(\omega_{k_v+1}) - F_\nu(v_s)}{\omega_{k_v+1} - v_s} t \leq x < \frac{F_\nu(u_d) - F_\nu(\omega_{k_u-1})}{u_d - \omega_{k_u-1}} t &\Rightarrow u(x, t) = v(x, t), \\ x > \frac{F_\nu(u_d) - F_\nu(\omega_{k_u-1})}{u_d - \omega_{k_u-1}} t &\Rightarrow u(x, t) = u_d \leq v(x, t), \end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

**CASO 3:**  $u_d \leq v_d \leq u_s \leq v_s$

In questo caso i due problemi di Riemann  $(u_s, u_d)$  e  $(v_s, v_d)$  sono risolti come in (3.17), e quindi, per la convessità di  $F_\nu$  vale

$$\begin{aligned} x < \frac{F_\nu(u_d) - F_\nu(u_s)}{u_d - u_s} t &\Rightarrow u(x, t) = u_s \leq v_s = v(x, t), \\ \frac{F_\nu(u_d) - F_\nu(u_s)}{u_d - u_s} t \leq x < \frac{F_\nu(v_d) - F_\nu(v_s)}{v_d - v_s} t &\Rightarrow u(x, t) = u_d \leq v_s = v(x, t), \\ x \geq \frac{F_\nu(v_d) - F_\nu(v_s)}{v_d - v_s} t &\Rightarrow u(x, t) = u_d \leq v_d = v(x, t), \end{aligned}$$

come si voleva.

□



# Bibliografia

- [1] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser (1997).
- [2] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem*, Oxford University Press (2000).
- [3] M.G. Crandall, P.L. Lions e L.C. Evans, Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 282 (1984), pp. 487–502.
- [4] C.M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer–Verlag (2000).
- [5] E. DiBenedetto, *Partial differential equations*, Birkhäuser (1995).
- [6] L.C. Evans *Partial differential equations*, AMS (1999).
- [7] G.B. Folland, *Real Analysis. Modern techniques and their applications*, Wiley Interscience (1999).
- [8] F. John, *Partial differential equations*, Springer–Verlag (1982).
- [9] W.A. Strauss, *Partial differential equations. An introduction*, John Wiley & Sons (1992).