Unicità delle soluzioni deboli entropiche

Definizione 1 Sia $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ soluzione debole del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases} \tag{1}$$

con $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ strettamente convessa. Allora u si dice soluzione entropica o entropicamente ammissibile se soddisfa la condizione di entropia (di Oleinik)

$$u(x+z,t) - u(x,t) \le \frac{C}{t} z \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\,,\ z > 0\,,\ t > 0\,, \tag{2}$$

per qualche costante $C > 0$.

Teorema 1 *A meno di insiemi di misura nulla, esiste al più una soluzione debole entropicamente ammissibile di (1).*

Dim. Nel seguito C' indicherà sempre una opportuna costante positiva che dipende solo dai dati di (1).

1. Sappiamo che se v è soluzione debole entropica di (1), allora è anche soluzione nel senso delle distribuzioni e dunque vale

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} v\varphi_t + F(v)\varphi_x \; dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0) \; dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)\,. \tag{3}$$

Siano u e $\widetilde{u}$ due soluzioni deboli entropiche di (1). Allora grazie a (3) $w = u - \widetilde{u}$ soddisfa

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w\big[\varphi_t + b\varphi_x\big] \; dxdt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)\,, \tag{4}$$

dove

$$b(x,t) = \int_0^1 F'\big(ru(x,t) + (1-r)\widetilde{u}(x,t)\big) \; dr\,.$$

L'idea per proseguire è la seguente: fissata $\psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, vogliamo trovare $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)$ che soddisfi

$$\varphi_t + b\varphi_x = \psi\,, \tag{5}$$

in modo da ottenere da (4)

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w\psi \; dxdt = 0\,. \tag{6}$$

Data l'arbitrarietà di ψ si conclude che $w = 0$ q.o.. Il problema è che in generale, non abbiamo sufficiente regolarità su b per poter risolvere (5). Procediamo allora prendendo delle opportune approssimanti regolari di u e $\widetilde{u}$. Sia η^ε mollificatore nelle variabili x e t, con $\operatorname{supp}\eta^\varepsilon \subset]-\infty,0[\times\mathbb{R}$. Poniamo $u^\varepsilon = \eta^\varepsilon * u$, $\widetilde{u}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \widetilde{u}$, che sono ben definite per ogni $t \ge 0$, grazie alla scelta dei supporti delle η^ε. Sia inoltre

$$b^\varepsilon(x,t) = \int_0^1 F'\big(ru^\varepsilon(x,t) + (1-r)\widetilde{u}^\varepsilon(x,t)\big) \; dr\,. \tag{7}$$

Allora valgono

$$\|u^\varepsilon\|_\infty \le \|u\|_\infty\,, \qquad \|\widetilde{u}^\varepsilon\|_\infty \le \|\widetilde{u}\|_\infty \tag{8}$$

$$u^\varepsilon \to u\,, \quad \widetilde{u}^\varepsilon \to \widetilde{u} \qquad \text{q.o. per } \varepsilon \to 0\,. \tag{9}$$

Inoltre, fissato $\tau > 0$, valgono

$$u_x^\varepsilon(x,t)\,,\ \widetilde{u}_x^\varepsilon(x,t) \le \frac{C}{\tau} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, t \ge \tau\,, \tag{10}$$

dove $C > 0$ è la costante che compare nella condizione di entropia per u e $\widetilde{u}$. Dimostriamo la stima per u_x^ε, l'altra è perfettamente analoga. Si osservi che, per la condizione di entropia (2), per q.o. $h > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \le \frac{C}{t}\,.$$

Sfruttando il fatto che l'integrale di η^ε vale 1 per ogni ε e sapendo che $\eta^\varepsilon(\xi,s) = 0$ se $s \ge 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{u^\varepsilon(x+h,t) - u^\varepsilon(x,t)}{h} &= \iint \eta^\varepsilon(\xi,s)\frac{u(x+h-\xi,t-s) - u(x-\xi,t-s)}{h}\ d\xi ds \\
&\le \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} \eta^\varepsilon(\xi,s) \frac{C}{t-s}\ d\xi ds \le \frac{C}{t}\int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} \eta^\varepsilon(\xi,s)\ d\xi ds \\
&= \frac{C}{t}\,,
\end{aligned}$$

da cui, passando al limite per $h \to 0^+$, si ricava (10) per $t \ge \tau$. Da (7), (8) e (10) si ottiene che esiste $C' > 0$ indipendente da ε tale che

$$b_x^\varepsilon(x,t) \le \frac{C'}{\tau} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, t \ge \tau\,. \tag{11}$$

2. Da (4) si ricava che per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ vale

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w\big[\varphi_t + b^\varepsilon \varphi_x\big]\ dxdt + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w[b - b^\varepsilon]\varphi_x\ dxdt = 0\,. \tag{12}$$

Fissata $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ siano $\overline{\tau}, T > 0$ tali che

$$\psi(x,t) = 0 \qquad \forall t \notin]\overline{\tau}, T[\,. \tag{13}$$

Possiamo ora trovare $\varphi^\varepsilon \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ tale che

$$\begin{cases} \varphi_t^\varepsilon + b^\varepsilon \varphi_x^\varepsilon = \psi \\ \varphi^\varepsilon(T) = 0\,, \end{cases} \tag{14}$$

usando il metodo delle caratteristiche. Si ottiene

$$\varphi^\varepsilon(x,t) = -\int_t^T \psi\big(\xi^\varepsilon(s;x,t),s\big)\ ds\,,$$

dove $[0,T] \ni s \mapsto \xi^\varepsilon(s;x,t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\xi}(s) = b^\varepsilon\big(\xi(s),s\big) \\ \xi(t) = x\,. \end{cases} \tag{15}$$

Utilizzando φ^ε in (12) si ottiene che vale

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w(x,t)\psi(x,t)\ dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}} w[b-b^\varepsilon]\varphi_x^\varepsilon\ dxdt = 0\,.$$

Se dimostriamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w[b-b^\varepsilon]\varphi_x^\varepsilon\ dxdt = 0\,, \tag{16}$$

allora vale (6), che è quello che vogliamo. Per provare (16), fissiamo $\tau < \overline{\tau}$, con $\overline{\tau}$ come in (13), cosicché

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} w[b-b^\varepsilon]\varphi_x^\varepsilon\ dxdt = \int_0^{\tau}\int_{\mathbb{R}} w[b-b^\varepsilon]\varphi_x^\varepsilon\ dxdt + \int_\tau^T\int_{\mathbb{R}} w[b-b^\varepsilon]\varphi_x^\varepsilon\ dxdt \doteq \mathcal{J}_\tau^\varepsilon + \mathcal{I}_\tau^\varepsilon\,,$$

e dimostriamo che valgono

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\tau^\varepsilon = 0 \qquad \forall \tau\leq\overline{\tau}\,, \tag{17}$$

$$\big|\mathcal{J}_\tau^\varepsilon\big| \leq C'\tau \qquad \forall\tau\leq\overline{\tau}\,. \tag{18}$$

3. Dimostriamo (17). Osserviamo che $b^\varepsilon \to b$ q.o. e che le funzioni φ^ε hanno supporto contenuto in uno stesso compatto dipendente da ψ ma indipendente da ε, perché le funzioni b^ε sono uniformemente (in ε) limitate in $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. Quindi per dimostrare (17) è sufficiente provare che esiste una costante C'_τ, indipendente da ε, tale che

$$|\varphi_x^\varepsilon(x,t)| \leq C'_\tau \qquad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[\tau,T]\,, \tag{19}$$

e utilizzare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Differenziando (14) si ottiene che φ_x^ε verifica

$$\begin{cases} (\varphi_x^\varepsilon)_t + b^\varepsilon(\varphi_x^\varepsilon)_x = -b_{\varepsilon,x}\varphi_x^\varepsilon + \psi_x \\ \varphi_x^\varepsilon(x,T) = 0\,, \end{cases}$$

e dunque lungo una caratteristica $\xi^\varepsilon(\cdot)$, posto $\zeta(s) = \varphi_x^\varepsilon\big(\xi^\varepsilon(s),s\big)$, vale

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(s) = -b_x^\varepsilon\big(\xi^\varepsilon(s),s\big)\zeta(s) + \psi_x\big(\xi^\varepsilon(s),s\big) \\ \zeta(T) = 0\,. \end{cases}$$

Grazie a (11), si ottiene che esiste C'_τ tale che $|\zeta(s)| \leq C'_\tau$ per ogni $s\geq\tau$, e dunque (19) è verificata. Infatti, sia $]t_0,t_1[\subseteq[\tau,T]$ un intervallo massimale dove $\zeta(s)>0$. Allora $\widetilde{\zeta}(s)\doteq\zeta(t_1-s)$, $0\leq s\leq t_1-t_0$ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\widetilde{\zeta}(s) = b_x^\varepsilon\big(\xi^\varepsilon(s),s\big)\widetilde{\zeta}(s) - \psi_x\big(\xi^\varepsilon(s),s\big) \leq \dfrac{C'}{\tau}\widetilde{\zeta}(s) + \|\psi_x\|_\infty \\ \widetilde{\zeta}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Quindi vale la stima

$$0 \leq \widetilde{\zeta}(s) \leq \frac{\tau}{C'}\|\psi_x\|_\infty \left(e^{C's/\tau} - 1\right) \,,$$

da cui discende la stima per ζ. Sia ora $]t_0, t_1[\subseteq [\tau, T]$ un intervallo massimale dove $\zeta(s) < 0$. Allora $\widetilde{\zeta}(s) \doteq \zeta(t_1 - s)$, $0 \leq s \leq t_1 - t_0$ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\widetilde{\zeta}(s) = b_x^\varepsilon\big(\xi^\varepsilon(s), s\big)\widetilde{\zeta}(s) - \psi_x\big(\xi^\varepsilon(s), s\big) \geq -\dfrac{C'}{\tau}\widetilde{\zeta}(s) - \|\psi_x\|_\infty \\ \widetilde{\zeta}(0) = 0 \,, \end{cases}$$

e quindi

$$0 \geq \widetilde{\zeta}(s) \geq \frac{\tau}{C'}\|\psi_x\|_\infty \left(e^{-C's/\tau} - 1\right) \,,$$

da cui nuovamente discende la stima per ζ.

4. Dimostriamo (18). Per farlo, proviamo che esiste una costante D indipendente da ε tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\varepsilon(x,t)| \; dx \leq D \qquad \forall t \in [0, \overline{\tau}] \,. \tag{20}$$

Se (20) è vera, allora grazie anche a (8), si ha

$$\left|\mathcal{J}_\tau^\varepsilon\right| \leq \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} \left|w[b - b^\varepsilon]\right| \left|\varphi_x^\varepsilon\right| \; dxdt \leq C'\tau \sup_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi_x^\varepsilon(x,t)\right| \; dx \leq C'D\tau \,,$$

che è (18). Torniamo allora a (20). Grazie a quanto osservato all'inizio del punto **3** circa i supporti delle φ^ε, possiamo fissare $K \subset \mathbb{R}$ compatto tale che

$$\operatorname{supp} \varphi^\varepsilon(\cdot, t) \subseteq K \qquad \forall t \geq 0, \varepsilon > 0 \,. \tag{21}$$

Scriviamo l'integrale in (20) come

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\varepsilon(x,t)| \; dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \left|\varphi^\varepsilon(x_{i+1}, t) - \varphi^\varepsilon(x_i, t)\right| : x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} \right\} .$$

Osserviamo che, grazie a (13), φ^ε soddisfa

$$\varphi_t^\varepsilon + b^\varepsilon \varphi_x^\varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times [0, \overline{\tau}] \,,$$

ed è dunque costante lungo le linee caratteristiche. Fissati $t \leq \overline{\tau}$ e $x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1}$, troviamo $y_1 < y_2 < \cdots < y_{N+1}$ tali che $\varphi^\varepsilon(x_i, t) = \varphi^\varepsilon(y_i, \overline{\tau})$: basta prendere $y_i = \xi^\varepsilon(\overline{\tau}; x_i, t)$, dove $\xi_\varepsilon(\cdot; x_i, t)$ risolve (15) con $x = x_i$. Allora

$$\sum_{i=1}^N \left|\varphi^\varepsilon(x_{i+1}, t) - \varphi^\varepsilon(x_i, t)\right| = \sum_{i=1}^N \left|\varphi^\varepsilon(y_{i+1}, \overline{\tau}) - \varphi^\varepsilon(y_i, \overline{\tau})\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\varepsilon(x, \overline{\tau})| \; dx \leq C'_{\overline{\tau}} \operatorname{meas}(K) \doteq D \,,$$

dove $C'_{\overline{\tau}}$ è la costante in (19) per $\tau = \overline{\tau}$ e K è il compatto fissato in (21). Facendo variare $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ e prendendo l'estremo superiore, si ottiene (20). Questo conclude la dimostrazione.