

ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2006-2007

Complementi sulle distribuzioni

1) La distribuzione v.p. $\frac{1}{x}$. Il testo (p. 275) dimostra che la definizione

$$\langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, v \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \frac{v(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{v(x) - v(0)}{x} dx \quad (1)$$

ha senso. Proviamo che il funzionale così definito è una distribuzione, cioè che se la successione $v_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, allora $\langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, v_n \rangle \rightarrow 0$ in $\mathbb{C}$. Ricordando che, per il teorema di Lagrange, per ogni x e per ogni n esiste $\xi = \xi(x, n)$ tale che $v_n(x) - v_n(0) = v'_n(\xi)x$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, v_n \rangle \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{v_n(x) - v_n(0)}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} v'_n(\xi) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |v'_n(\xi)| dx. \end{aligned}$$

Ricordando che tutti i supporti delle v_n sono contenuti nello stesso intervallo $[a, b]$ e che in $[a, b]$, in particolare, la successione v'_n tende uniformemente a zero, l'ultimo integrale è maggiorato da $(b - a)\|v'_n\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Proviamo ora che p.v. $(1/x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La dimostrazione che per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (1) continua ad aver senso è analoga al caso $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e viene omessa. Sia allora $v_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$. Allora, procedendo come sopra sfruttando il teorema di Lagrange e usando la disparità di $x \mapsto 1/x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, v_n \rangle \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_n(x) - v_n(0)}{x} dx \right| \\ &\leq \left| \int_{|x| \leq 1} \frac{v_n(x) - v_n(0)}{x} dx \right| + \left| \int_{|x| \geq 1} \frac{v_n(x) - v_n(0)}{x} dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |v'_n(\xi)| dx + \int_{|x| \geq 1} \left| \frac{v_n(x)}{x} \right| dx \\ &\leq 2\|v'_n\|_{\infty} + \int_{|x| \geq 1} \left| \frac{(1+x^2)v_n(x)}{x(1+x^2)} \right| dx \\ &\leq 2\|v'_n\|_{\infty} + \|(1+x^2)v_n\|_{\infty} \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|(1+x^2)} dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2) **Proposizione** Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Allora $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Dim.: Ci limitiamo a considerare $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) \neq 0$, e per fissare le idee assumiamo che $f(x_0) > 0$. Poiché f è continua, esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Sia

$$v(x) = e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-r^2}} \chi_{]x_0-r, x_0+r[}(x).$$

Allora

$$v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \text{supp } v = [x_0 - r, x_0 + r], \quad v(x) > 0 \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)v(x) dx = \int_{-r}^{+r} f(x)v(x) dx > 0,$$

contro l'ipotesi

1) Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ \alpha x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di f nel senso delle distribuzioni.

3) **Proposizione** Siano $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $v_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Allora $(\psi v_k) \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dim.: Innanzitutto osserviamo che $\psi v_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ perché prodotto di funzioni $\mathcal{C}^\infty$, e

$$\text{supp } (\psi v_k) \subseteq \text{supp } v_k,$$

da cui si deduce che ψv_k ha supporto compatto, e quindi appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $\text{supp } v_k \subseteq [-r, r]$ per qualche $r > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, anche $\text{supp } (\psi v_k) \subseteq [-r, r]$. Dunque, per verificare la convergenza a 0 in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ bisogna verificare che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D^p(\psi v_k)\|_\infty = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Usando la formula di Liebniz per la derivata di un prodotto si ottiene

$$D^p(\psi v_k)(x) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \psi^{(j)}(x) v_k^{(p-j)}(x). \quad (2)$$

Siano

$$C \doteq \max_{j=0, \dots, p} \|\psi^{(j)}\|_{L^\infty(-r, r)}, \quad C' \doteq \max_{j=1, \dots, p} \binom{p}{j}.$$

Da (2) si ottiene

$$|D^p(\psi v_k)(x)| \leq \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} |\psi^{(j)}(x)| |v_k^{(p-j)}(x)| \leq CC' \sum_{j=0}^p \|v_k^{(p-j)}\|_\infty,$$

da cui

$$\|D^p(\psi v_k)(x)\|_\infty \leq CC' \sum_{j=0}^p \|v_k^{(p-j)}\|_\infty \rightarrow 0$$

essendo $\|v_k^{(n)}\|_\infty \rightarrow 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4) **Proposizione** Sia $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che esiste $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ per cui $\widehat{v}_k \rightarrow \widehat{v}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora $v_k \rightarrow v$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dim.: È noto che se $w_k \rightarrow w$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $\widehat{w}_k \rightarrow \widehat{w}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Grazie alla formula di dualità

$$v_k(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\widehat{v}_k](-x) \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\widehat{v}](-x) = v(x).$$

Da questo risultato si deduce che

$$v_k \rightarrow v \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{v}_k \rightarrow \widehat{v} \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

5) **Proposizione** La trasformata di Fourier è una biiezione di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ in se stesso.

Dim.: Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tali che $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2]$, cosicché

$$\langle f_1, \widehat{v} \rangle = \langle f_2, \widehat{v} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Poiché la trasformata di Fourier è biiettiva come funzione da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, fissata $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ esiste $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $w = \widehat{v}$. Allora si ha

$$\langle f_1, w \rangle = \langle f_1, \widehat{v} \rangle = \langle f_2, \widehat{v} \rangle = \langle f_2, w \rangle,$$

e dunque $f_1 = f_2$ ed la trasformata di Fourier è iniettiva. Per dimostrare la suriettività, fissiamo $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Allora, dalla formula di dualità

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\widehat{f}](-x),$$

e quindi

$$f(x) = \mathcal{F}[(1/2\pi)\widehat{f}(-x)](x),$$

e quindi f è la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata essendo $\widehat{f}$ temperata.

6) **Teorema** Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Allora $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e solo se $\widehat{f}_k \rightarrow \widehat{f}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Dim.: Supponiamo che $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, cosicché

$$\langle f_k, v \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Allora, poiché $\widehat{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qualora $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha

$$\langle \widehat{f}_k, v \rangle = \langle f_k, \widehat{v} \rangle \rightarrow \langle f, \widehat{v} \rangle = \langle \widehat{f}, v \rangle,$$

da cui $\widehat{f_k} \rightarrow \widehat{f}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Viceversa, supponiamo che $\widehat{f_k} \rightarrow \widehat{f}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Fissata $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sia $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\widehat{w} = v$. Allora

$$\langle f_k, v \rangle = \langle f_k, \widehat{w} \rangle = \langle \widehat{f_k}, w \rangle \rightarrow \langle \widehat{f}, w \rangle = \langle f, \widehat{w} \rangle = \langle f, \widehat{v} \rangle,$$

da cui $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esercizi sulle distribuzioni

1) (Mariconda) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1 \end{cases}$$

- i) Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;
- ii) calcolare la trasformata di Fourier di f'' ;
- iii) dedurre $\widehat{f}$ e provare che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
- iv) dedurre il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \cos u - \sin u}{u^3} \cos \frac{u}{2} du.$$

Svolgimento: $f'(x) = -2x\chi_{[-1,1]}(x)$, $f''(x) = -2\chi_{[-1,1]}(x) + 2\delta(x-1) + 2\delta(x+1)$. Perciò $-\omega^2 \widehat{f}(\omega) = \widehat{f''}(\omega) = 4 \cos \omega - 4 \frac{\sin \omega}{\omega}$. Siccome $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ è una funzione continua. Dalla formula precedente risulta perciò

$$\widehat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}.$$

Si osservi che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e quindi vale la formula di inversione per f . Per $x = 1/2$ essa dà, in particolare,

$$f(1/2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 4e^{i\omega/2} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} d\omega,$$

da cui, per parità, $I = -3\pi/8$.

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } |x| \leq 1 \\ 2 - x & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ -2 - x & \text{per } -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{per } |x| > 2 \end{cases}$$

- i) Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;
- ii) calcolare la trasformata di Fourier di f'' ;
- iii) dedurre $\widehat{f}$ e provare che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
- iv) dedurre il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin u - \sin(2u)}{u^2} \sin u du.$$

(risultato: $\widehat{f}(\omega) = 2i(-2 \sin \omega + \sin(2\omega))/\omega^2$; $I = \pi$)

3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{per } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{per } |x| > \pi/2 \end{cases}$$

- i) Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;
- ii) calcolare la trasformata di Fourier di f'' (esprimendola in funzione di $\hat{f}$);
- iii) dedurre $\hat{f}$ e provare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
- iv) dedurre il valore di

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1 - \omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{4} d\omega.$$

(risultato: $\hat{f}(\omega) = 2 \cos(\pi\omega/2)/(1 - \omega^2)$, $I = \pi/\sqrt{2}$)

- 4) i) Dire se la funzione $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ o in $L^2(\mathbb{R})$.
 - ii) Calcolare la derivata prima f' (nel senso delle distribuzioni) di $f(x)$.
 - iii) Dimostrare che f' è una distribuzione temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.
 - iv) Dedurre da iii) quanto vale la trasformata di Fourier di f .
- (Risultato: $\hat{f}(\omega) = \pi i(e^{-|\omega|} - 1)/\omega$; si osservi che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, come doveva essere, e che $\hat{f}$ non è continua.)
- 5) Dimostrare che la successione $\frac{2}{\pi} \arctan kx$ converge a $\text{sign } x$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
 - 6) Servendosi della trasformata di Fourier, trovare le soluzioni dell'equazione

$$y'' - y = \delta$$

che sono distribuzioni temperate. (Risultato: $y(t) = -e^{-|t|}/2$)

- 7) (16.12.2004) i) Si calcolino la trasformata di Fourier e la derivata della distribuzione $\delta(x - 2)$.
 - ii) Si provi che $T(x) = (x^2 + 1)\delta(x - 2)$ è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.
 - iii) Si calcoli la trasformata di Fourier di T .
- 8) (16.12.2004, facoltativo) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^n \chi_{[\sqrt{n}-2, \sqrt{n}]}(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ di $\{f_n(t)\}$. Si studi inoltre la convergenza di $\{f_n(t)\}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

9) (11.1.2005) Sia $f(x) = (|x| - 2)\chi_{[-2, 2]}(x)$.

- i) Si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' nel senso delle distribuzioni di f ;
- ii) si calcoli la trasformata di Fourier di f'' e se ne deduca la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f ;
- iii) usando la formula di inversione per $\hat{f}$ si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2u) - 1}{u^2} \cos u du.$$

iv) (Facoltativo) Detta $f_n(x) = (|x| - 2)\chi_{[-2-1/n, 2+1/n]}(x)$, si dica se

- a) f_n converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$;

b) $\hat{f}_n$ converge a $\hat{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}$ (non calcolare $\hat{f}_n$).

10) (11.1.2005, facoltativo) Si calcoli la distribuzione

$$T_n(x) = x^n \delta^{(n-1)}(x)$$

al variare di $n = 1, 2, \dots$ ($\delta^{(k)}$ indica la derivata k -esima della δ di Dirac).

11) (7.9.2005) Si consideri la funzione $f(x) = x|x|$ se $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ se $|x| > 1$.

- i) Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
- ii) Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f .
- iii) Si provi che $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; ci sono teoremi dai quali queste proprietà potevano essere dedotte senza calcolare $\hat{f}$?
- iv) Si calcoli la derivata prima f' di f nel senso delle distribuzioni e si dimostri che f' è temperata.
- v) Usando l'espressione trovata per $\hat{f}$, si calcoli la trasformata di Fourier di f' .

12) (20.9.2005) Sia $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ la successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } 1/n \leq |x| \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire se la successione f_n converge a f

- 1) puntualmente, uniformemente in $\mathbb{R}$;
- 2) in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$;
- 3) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

13) (13.7.06) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt[4]{|x|}}.$$

- (i) si provi che, per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $fv \in L^1(\mathbb{R})$;
- (ii) si provi che il funzionale

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \langle T_f, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)v(x) dx$$

è una distribuzione temperata;

- (iii) si determini per quali $p \geq 1$ la funzione f^p appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

14) (9.1.06) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{per } 0 < |x| \leq n \\ 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (i) Si calcoli il limite puntuale f di f_n e si dica se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$ oppure negli intervalli del tipo $[-r, r]$, $r \in \mathbb{R}$;
- (ii) si dica se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ oppure $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- (iii) si dica se f_n converge a f in $L^1(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

15) (13.12.05) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{per } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{per } |x| > \pi, \end{cases}$$

- (i) si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni;
- (ii) si esprima f'' in termini di f
- (iii) mediante ii) si calcoli la trasformata di Fourier di f'' (esprimendola in funzione di $\hat{f}$) e se ne deduca il valore di $\hat{f}$;
- (iv) si provi che $\hat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; si dica se ciò poteva essere dedotto dalle proprietà di f ; si provi infine che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;
- (v) si deduca dall'espressione di $\hat{f}$ il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega\pi/2) d\omega;$$

- (vi) (facoltativo) si risponda alla domanda (i) relativamente alla funzione $g(x) = |\sin x|$; si dica se g'' è una distribuzione temperata.

16) Risolvere l'esercizio 5) sulla trasformate di Fourier in L^2 dimostrando che $\hat{g}_n \rightarrow 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e antitrasformando.

17) Calcolare il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definita da

$$u_k(x) = \frac{2k}{4 + k^2 x^2} + \frac{1}{2} [\tanh(kx) + 1].$$

18) Si dimostri che la funzione

$$f(t) = \frac{1 - \cos(\pi t)}{t}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e se ne calcoli la norma $\|f\|_2$.

Sugg.: tenere presente che $\mathcal{F} \left[\text{p.v.} \frac{1}{x} \right] (\omega) = \frac{\pi}{i} \text{sgn } \omega$

19) Sia $u(x) = \text{p.v.}(1/x)$, distribuzione temperata. Sia $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la successione definita da

$$v_k(x) = u(kx).$$

Calcolare, se esiste, la distribuzione $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tale che $v_k \rightarrow v$ nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

20) [**difficile**] Provare che

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} \rightarrow \text{p.v.}\frac{1}{x} - i\pi\delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Sugg.: tenere presente che $(\log|x|)' = \text{p.v.}(1/x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

21) Svolgere gli esercizi da 7.2-1 a 7.2-6 a pag. 280 del testo.