ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2007-2008

Esercizi sugli spazi normati e la teoria della misura

1. Esercizi sugli spazi normati

1) Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Si provi che il funzionale lineare

$$I_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad I_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$$

è continuo.

2) Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{y} = 2y, \quad y(0) = \xi \in \mathbb{R}$$

e sia y_ξ la sua soluzione. Si provi che la funzione (lineare)

$$f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}([0,1]), f(\xi) = y_\xi$$

è continua (in $\mathcal{C}([0,1]$ si consideri la norma $\|\cdot\|_\infty$).

3) Sia X uno spazio di Hilbert e sia $v \in X$. Si provi che la funzione (lineare)

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x \,|\, v)$$

è continua.

4) (Dal compito del 11.1.2005) Si consideri la funzione f così definita: per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $f(x)(\cdot)$ è la funzione

$$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\,ds, \qquad t \in [0,1].$$

Si provi che
(i) per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $f(x)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$;
(ii) $f : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup).

5) (Dal compito del 7.9.2005) Si consideri la funzione τ così definita: per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τf è la funzione da $(-\pi/2, \pi/2)$ in $\mathbb{R}$ definita da $(\tau f)(x) = f(\tan x)$. Si provi che:
(i) se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\tau f \in L^1(-\pi/2, \pi/2)$,
(ii) $\tau : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(-\pi/2, \pi/2)$ è lineare e continua.

6) Si consideri la funzione f così definita: per ogni $x \in L^2([0,1])$, $f(x)(\cdot)$ è la funzione

$$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt[4]{s}}\,ds, \qquad t \in [0,1].$$

Si provi che
(i) per ogni $x \in L^2([0,1])$, $f(x)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$;
(ii) $f : L^2([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup).

7) (dal compito del 22.9.06) Si considerino, al variare di $k \in \mathbb{N}$, le funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x = 0 \\ \frac{\sin kx}{kx} & \text{per} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in L^1(-1,1)$, la funzione $f_k(\cdot)u(\cdot)$ appartiene a $L^1(-1,1)$;

(b) si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in L^1(-1,1)$, la funzione

$$T_k u : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad T_k u(x) = \int_{-1}^{x} f_k(t)u(t)\,dt$$

è continua e perciò sommabile in $[-1,1]$;

(c) si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, il funzionale

$$T_k : L^1(-1,1) \to L^1(-1,1)$$

è lineare e continuo;

(d) per ogni $u \in L^1(-1,1)$ si calcoli il limite in $L^1(-1,1)$ (per $k \to \infty$) di $T_k u$.

8) (dal compito del 13.12.2006) Sia $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ e si ponga

$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

(i) Si provi che $\|\cdot\|$ è una norma in $\mathcal{C}^1([0,1])$.

(ii) Per ogni $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ si definisca la funzione $I(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; si provi che il funzionale $I : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$ è lineare e continuo (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup, in $\mathcal{C}^1([0,1])$ la norma $\|\cdot\|$).

9) Si segnalano gli esercizi 1.2-3, 1.2-8, 1.2-12, 1.2-14, 1.2-18, 1.2-19 alle pagine 19, 20 e 21 del testo.

2. Esercizi sulla sommabilità

1) Studiare la sommabilità in $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni e calcolarne l'integrale:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{1 + e^{x^2} e^{|y|}},$$

$$f(x,y) = \frac{x}{1 + |x|^5 + y^2} \qquad \text{(della stessa natura del precedente)}$$

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

(passare a coordinate polari).

2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\| \geq 1\}$ e

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}, \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la sommabilità di f in A per $n = 2$ e $n = 3$ e calcolarne l'integrale. (Passare a coordinate polari).

3) Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| \leq 1\}$ e

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la sommabilità di f in B per $n = 2$ e $n = 3$ e calcolarne l'integrale. (Passare a coordinate polari).

4) (Dal compito del 16.12.2004) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^5}{1 + y^2 e^{2|x|}}.$$

a) Si provi che f è sommabile in $\mathbb{R}^2$;
b) si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$.

5) (Dal compito del 20.9.2005) Si provi che la funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 y)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$ e si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$.

6) Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx \sin(n^2 x^2 e^{nx^2})}{1 + n^2 x^2}\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sin(n^2 x^2) e^{-n^2 x^2}\, dx.$$

7) Si provi che per ogni $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{x \sin y}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$ e si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$.

8) Sia data la successione $\{g_n(x)\}$ per $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}$ con

$$g_n(x) = \begin{cases} \chi_{[n,n+1]}(x) & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ e^{-n|x|} + \dfrac{1}{\pi} \dfrac{e^{ix/n}}{1 + |x|^{2+\frac{1}{n}}} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx\,.$$

9) (dal compito del 8.1.2007) Siano α un parametro reale, $f(x, y)$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{\arctan(xy)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

e B_1 il disco unitario di $\mathbb{R}^2$.

(i) Si provi che se $\alpha < 2$ allora $f \in L^1(B_1)$ (sugg.: $|\arctan t| \leq |t|$);

(ii) Si mostri che per ogni $1 < \alpha < 2$ la funzione f è sommabile in $\mathbb{R}^2$; per tali valori di α si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$.

10) Si segnalano gli esercizi 2.2-4, 2.2-5, 2.2-6, 2.2-8 e 2.2-9 alle pagine 60 e 61 del testo.