Programma del corso di Analisi Reale e Complessa
per Ingegneria delle Telecomunicazioni e dell'Automazione
Anno Accademico 2008/2009

Legenda: dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale e uniforme e loro relazione (D). Criterio di Weierstrass (D). Convergenza totale di una serie di funzioni. Continuità del limite uniforme di funzioni continue (D). Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale (D caso $\mathcal{C}^0$) e sotto segno di derivata (D caso $\mathcal{C}^1$).

Analisi funzionale

Spazi vettoriali normati, insiemi aperti e chiusi, successioni convergenti. Limitatezza delle successioni convergenti (D). Caratterizzazione degli insiemi chiusi mediante successioni (D). Nozione di completezza e spazi di Banach. Completezza di $\mathcal{C}^0([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ (D), non completezza con norma $\|\cdot\|_1$ (D). Caratterizzazione di insiemi chiusi tramite successioni (D). Funzioni continue tra spazi normati. Caratterizzazione delle funzioni continue mediante successioni. Caratterizzazione delle funzioni lineari e continue tra spazi normati (D). Spazi con prodotto scalare. Norma indotta da un prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (D), disuguaglianza triangolare (D), legge del parallelogramma (D solo necessità), norme hilbertiane. Vettori ortogonali, teorema di Pitagora (D), chiusura dell'ortogonale di un insieme (D). Esistenza della proiezione ortogonali su sottospazi di dimensione finita (D con base ortogonale), disuguaglianza di Bessel (D). Spazi di Hilbert e basi hilbertiane. Teorema sulla convergenza di $\sum_n c_n e_n$ con $\{c_n\}_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $\{e_n\}_n$ famiglia ortonormale (D). Uguaglianza di Parseval.

Integrale di Lebesgue

Misura esterna, insiemi misurabili, misurabilità degli insiemi con misura esterna nulla (D). Proprietà della famiglia degli insiemi misurabili. Funzioni misurabili. Funzioni semplici e loro integrale. Approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici. Funzioni integrabili alla Lebesgue e loro integrale. Proprietà delle funzioni L-integrabili. Nozione di "quasi ovunque". Teorema di Beppo Levi. Relazione tra la assoluta integrabilità in senso generalizzato e l'integrabilità alla Lebesgue (D nel caso dell'intervallo

$[1, +\infty[$). Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata. Continuità della funzione integrale di una funzione sommabile (D). Teorema fondamentale del calcolo per l'integrale di Lebesgue. Teoremi di Tonelli e di Fubini. Teorema del cambiamento di variabile. Spazi L^p. Struttura di Hilbert in L^2. Le inclusioni $L^\infty(E) \subset L^2(E)$, $L^2(E) \subset L^1(E)$ e $L^\infty(E) \subset L^1(E)$ con E insieme di misura finita (D). Approssimazione di funzioni di $L^1(E)$ con funzioni $L^2(E)$ (D facoltativa).

Serie di Fourier

Polinomi trigonometrici in forma reale e in forma complessa. Convergenza di una serie di Fourier in L^2 (D). Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval. Serie di soli seni e di soli coseni. Lemma di Riemann-Lebesgue (D per i coefficienti di Fourier). Espressione delle ridotte di una serie di Fourier con nuclei di Dirichlet (D). Criterio di Dini (D) e convergenza puntuale della serie di Fourier con condizioni di tipo Hölder (D). Criterio per la convergenza totale di una serie di Fourier (D). Serie di Fourier di funzioni T-periodiche.

Funzioni di variabile complessa

Funzioni continue di variabile complessa. Funzione esponenziale, radice quadrata principale, logaritmo principale. Funzioni circolari e iperboliche. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann (D). Condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari (D della necessità). Funzioni olomorfe. Non derivabilità delle funzioni a valori solo reali (D). Serie di potenze. Lemma di Abel (D). Raggio di convergenza. Convergenza totale di una serie potenze in palle ben contenute nel cerchio di convergenza. Teorema di Cauchy-Hadamard. Convergenza della serie formalmente derivata e olomorfia della somma di una serie di potenze (D). Curve in campo complesso. Integrale di una funzione di variabile complessa lungo una curva e sue proprietà. Forme differenziali associate. Formula di Gauss-Green. Teorema integrale di Cauchy (D). Teorema dell'intercapedine. Formula di Cauchy (D). Funzioni analitiche. Analiticità delle funzioni olomorfe (D). Teorema sugli zeri delle funzioni analitiche (D). Principio di identià delle funzioni analitiche (D). Teorema di Liouville (D). Teorema fondamentale dell'algebra (D). Singolarità isolate e loro classificazione: singolarità eliminabili, essenziali e poli. Serie bilatere. Teorema di Laurent. Caratterizzazione di una singolarità isolata mediante lo sviluppo di Laurent (D) e i limiti della funzione nel punto (D). Teorema di De L'Hôspital. Residuo di una funzione in una singolarità isolata. Calcolo del residuo di una funzione in un polo (D). Teorema dei residui (D, cenno). Lemma del cerchio piccolo (D). Lemma del cerchio grande

(D). Lemma di Jordan (D). Valor principale di un integrale di variabile reale e metodi di calcolo.

Trasformata di Fourier

Definizione, limitatezza e continuità della trasformata (D), lemma di Riemann-Lebesgue. Trasformate di funzioni reali pari e dispari. Formula di inversione. Formula di dualità. Trasformata della derivata e delle derivate successive (D). Derivate di una trasformata (D). Trasformata di $\exp(-ax^2)$ (D). Convoluzione di due funzioni. Disuguaglianza di Young (D solo per la convoluzione di due funzioni di L^1). Trasformata di una convoluzione (D). Soluzione dell'equazione del calore su una sbarra infinita con la trasformata di Fourier. Teorema di Plancherel. Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Biiettività della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (D). Il Principio di Indeterminazione di Heisenberg (D, facoltativo).

Distribuzioni

Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ delle funzioni test. Convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il lemma di Uryshon. Lo spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni. Lo spazio L^1_{loc}. Inclusione di L^1_{loc} in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (D). Una funzione di L^1_{loc} è individuata dalla distribuzione ad essa associata (D per funzioni continue). La delta di Dirac non è rappresentabile con una funzione di L^1_{loc} (D). La distribuzione $\text{p.v.}\,(1/x)$ (valor principale di $1/x$). Operazioni con le distribuzioni: composizione con funzione affine, moltiplicazione per una funzione $\mathcal{C}^\infty$ (D che si ottiene una distribuzione). Distribuzioni pari, dispari, periodiche. Derivata di una distribuzione. Espressione della derivata distribuzionale di una funzione $\mathcal{C}^1$ a tratti (D). Convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Le convergenze L^1_{loc} e $L^p(\mathbb{R})$ implicano la convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (D con $p = 1, 2, \infty$). La trasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ non è a supporto compatto (D). Convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ implica la convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (D). Distribuzioni temperate. Funzioni a crescita lenta e loro appartenenza a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (D). $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(R)$, $L^\infty(\mathbb{R})$ sono inclusi in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (D). $\text{p.v.}\,(1/x)$ è una distribuzione temperata. Trasformata di Fourier in ambito $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e sue proprietà (D). Calcolo di alcune trasformate (δ_0, 1, sin, cos, $\text{p.v.}\,(1/x)$, sgn, H). Biiettività della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (D). Convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e teorema di completezza. Relazione con la convergenza $L^p(\mathbb{R})$ (D con $p = 1, 2, \infty$). La convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ equivale alla convergenza delle trasformate (D). Segnali a potenza finita e trasformata di Fourier di un segnale periodico a energia finita (D, facoltativo).