

**Programma del corso di Analisi Matematica 2
per Ingegneria dell'Informazione
Anno Accademico 2009/2010**

Legenda: dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

Limiti e continuità di funzioni di più variabili

Topologia in \mathbb{R}^n . Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (D) e disuguaglianza triangolare (D). Distanza euclidea. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di frontiera. Punti di accumulazione e isolati. Insiemi aperti e chiusi. Caratterizzazione dei chiusi con i punti di accumulazione (D). Frontiera, interno e chiusura di un insieme. Insiemi densi. Insiemi limitati e teorema di Bolzano-Weierstrass. Il simbolo ∞ e i suoi intorni.

Limiti. Il concetto di definitivamente. Definizione di limite per funzioni di più variabili reali. Limiti di funzioni a valori vettoriali e loro caratterizzazione mediante i limiti delle componenti (D). Teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno e dei due carabinieri. Limiti di successioni, successioni e criterio di Cauchy, completezza di \mathbb{R}^n . Caratterizzazione dei punti di accumulazione di un insieme mediante successioni (D). Insiemi compatti e loro caratterizzazione come chiusi e limitati (D). Teorema ponte. Caratterizzazione del limite di una funzione mediante il limite delle sue restrizioni (D). Limiti in coordinate polari (D, traccia).

Funzioni continue. Compattezza dell'immagine di un insieme compatto tramite una funzione continua (D). Teorema di Weierstrass (D). Curve e insiemi connessi. Teorema di Bolzano (D). Teorema dei valori intermedi.

Calcolo differenziale in più variabili

Funzioni reali. Derivata lungo una direzione. Derivate parziali, gradiente e funzioni derivabili. Critica al concetto di derivabilità. Funzioni differenziabili. Continuità di una funzione differenziabile (D). Derivata della composizione di una funzione differenziabile con una curva. Piano tangente. Teorema del differenziale totale. Teorema della media (D). Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Laplaciano di una funzione. Polinomio di Taylor con i resti di Peano e Lagrange (D per polinomi di secondo grado).

Funzioni a valori vettoriali Differenziabilità e derivabilità di funzioni a valori vettoriali. Matrice jacobiana. Differenziabilità della composizione di funzioni differenziabili e regola della catena (D).

Massimi e minimi per funzioni di più variabili

Massimi e minimi liberi. Teorema di Fermat (D). Determinazione della natura dei punti di critici tramite la matrice hessiana (D).

Vincoli in \mathbb{R}^2 . Teorema di Dini in \mathbb{R}^2 (D). Punti regolari. Ortogonalità del gradiente di una funzione di due variabili rispetto alle sue curve di livello nei punti regolari (D).

Vincoli in \mathbb{R}^n . Teorema di Dini in \mathbb{R}^n . Derivate della funzione implicita (D) Punti regolari di un vincolo e spazio tangente. Struttura dello spazio tangente ad un vincolo in un punto: è uno spazio vettoriale (D facoltativa), coincide con lo spazio ortogonale ai gradienti della funzione che definisce il vincolo (D).

Massimi e minimi vincolati. Punti critici vincolati. Teorema sui moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^n (D). Lagrangiana per un problema di estremo vincolato e relazione tra punti critici vincolati e punti critici della lagrangiana (D).

Integrali curvilinei e forme differenziali

Curve. Curve semplici, chiuse, piane. Orientazione di una curva. Curve di Jordan. Vettore e versore tangente. Curve \mathcal{C}^1 , regolari, \mathcal{C}^1 a tratti e regolari a tratti. Cambiamento di parametro. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro (D). Parametro d'arco. Integrali di prima specie. Baricentro di una curva.

Forme differenziali. Forme differenziali e campo vettoriale associato. Integrali di seconda specie e loro comportamento rispetto a curve equivalenti (D). Forme differenziali esatte, campi conservativi e funzione potenziale. Caratterizzazione delle forme differenziali esatte con gli integrali di seconda specie (D). Forme differenziali chiuse e loro relazione con forme esatte (D). Campi irrotazionali. Circuiti omotopi. Invarianza dell'integrale di una forma chiusa su circuiti omotopi (D). Insiemi semplicemente connessi. Equivalenza tra forme chiuse e forme esatte su insiemi semplicemente connessi (D). Fattori integranti.

Integrazione di funzioni di più variabili

Integrali doppi su un rettangolo. Suddivisioni di un rettangolo. Funzioni integrabili su un rettangolo e loro integrale. Criterio di integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue. Linearità e monotonia dell'integrale. Teorema della media (D). Formule di riduzione (D).

Integrali doppi: caso generale. Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Insiemi di misura nulla e loro caratteriz-

zazione. Misura del grafico di una funzione integrabile su un intervallo (D). Integrabilità delle funzioni continue. Integrali di funzioni definite sull'unione di insiemi con intersezione di misura nulla (D). Integrabilità di una funzione limitata su un insieme di misura nulla (D, cenni). Domini normali. Formule di riduzione su un dominio normale (D). Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate polari. Baricentro di un insieme misurabile.

Integrali tripli. Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Insiemi di misura nulla e loro caratterizzazione. Misura del grafico di una funzione integrabile su un insieme misurabile. Integrabilità delle funzioni continue e proprietà dell'integrale. Integrazione per fili e per strati. Volume di un solido di rotazione (D). Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche. Baricentro di un insieme misurabile. Teorema di Pappo (D).

Superfici e integrali di superficie

Superfici. Superfici elementari. Punti interni e bordo di una superficie. Superfici cartesiane. Punti regolari e piano tangente a una superficie. Superfici orientabili. Superfici invertibili e orientazione del bordo. Superfici composte e loro orientazione.

Integrali superficiali. Area di una superficie. Area di una superficie cartesiana. Teorema di Guldino (D) sull'area di una superficie di rotazione. Definizione di integrale superficiale. Baricentro di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Teoremi di Gauss e di Stokes. Formule di Gauss-Green nel piano (D). Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2 (D solo per domini semplici rispetto ad entrambi gli assi). Domini di Green in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Formule per l'area di un dominio di Green (D). Teoremi della divergenza in \mathbb{R}^3 (D solo per domini semplici rispetto a tutti gli assi). Formula di integrazione per parti in \mathbb{R}^3 (D). Teorema del rotore in \mathbb{R}^2 (D) e in \mathbb{R}^3 .

Equazioni differenziali ordinarie

Teoria generale. Ordine di un'equazione. equazioni in forma normale. Sistemi del primo ordine in forma normale. Riduzione di un'equazione di ordine n in forma normale ad un sistema di n equazioni del primo ordine in forma normale. Funzioni localmente lipschitziane. Problema di Cauchy. Lemma di Gronwall (D). Teorema di Cauchy-Lipschitz (D unicità ed esistenza in grande). Equazioni a variabili separabili. Equazioni di Bernoulli. Sistemi autonomi e integrali primi. Integrale dell'energia. Integrali primi per sistemi

bidimensionali. Equazioni differenziali esatte e costruzione di una funzione costante lungo soluzioni (D).

Equazioni e sistemi lineari. Integrale generale di un'equazione lineare del primo ordine. Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine. Spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare del primo ordine omogeneo (D). Matrice wronskiana e teorema di Liouville-Jacobi. Integrale generale di un sistema non omogeneo, noto l'integrale del sistema omogeneo associato (D). Metodo della variazione delle costanti (D). Sistemi a coefficienti costanti. Costruzione di una base di soluzioni per $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ per A diagonalizzabile in \mathbb{R} e in \mathbb{C} . Basi di soluzioni per sistemi 2×2 omogenei. Equazioni lineari di ordine n . Base di soluzioni per un'equazione lineare di ordine n omogenea a coefficienti costanti. Equazioni lineari di ordine n non omogenee e metodo della variazione delle costanti (D). Metodo di simiglianza.

Elementi di analisi complessa

Funzioni di variabile complessa. Esponenziale complesso. Seno e coseno circolari e iperbolici in campo complesso. Radice quadrata principale. Logaritmo principale. Topologia, limiti e continuità in \mathbb{C} . Derivabilità in senso complesso e funzioni olomorfe. Condizioni di Cauchy-Riemann (D sola necessità). Curve in campo complesso e integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa. Forme differenziali associate ad una funzione di variabile complessa. Teorema integrale di Cauchy (D). Teorema dell'intercapedine (D). Formula di Cauchy (D). Serie di potenze: lemma di Abel (D) e raggio di convergenza. Integrabilità e derivabilità per serie. Funzioni analitiche. Analicità delle funzioni olomorfe (D). Teorema di Liouville (D). Singolarità isolate: sviluppi di Laurent e classificazione delle singolarità. Caratterizzazione delle singolarità mediante i limiti di una funzione (D, cenno). Residuo di una funzione in un punto. Calcolo del residuo in un polo (D). Indice di avvolgimento di una curva attorno ad un punto. Teorema dei residui. molteplicità di uno zero di una funzione olomorfa. Ordine di una funzione in uno zero e in un polo. Teorema dell'indicatore logaritmico (D).