Segnali a potenza finita

Un segnale a potenza finita è una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che

$$\exists M > 0 : \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 \ dx \leq M \quad \forall T \geq 1 \,. \tag{1}$$

Dimostriamo che φ definisce una distribuzione temperata tramite

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) v(x) \ dx \quad v \in \mathcal{S}(R) \,.$$

Per farlo, proviamo che la funzione

$$\zeta(x) = \frac{\varphi(x)}{1 + x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

è sommabile su $\mathbb{R}$, dal che si deduce che φ è funzione a crescita lenta essendo $\varphi(x) = (1 + x^2)\zeta(x)$. Osserviamo che, se $n \in I\!N$, grazie a (1) si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} &= \int_{n}^{n+1} |\varphi(x)|^2 \ dx + \int_{-(n+1)}^{-n} |\varphi(x)|^2 \ dx \\ &\leq \int_{-(n+1)}^{n+1} |\varphi(x)|^2 \ dx \leq M(n+1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \|\varphi\|_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} \leq \sqrt{M(n+1)} \,.$$

Da questo, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|}{1 + x^2} \ dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n \leq |x| \leq n+1} \frac{|\varphi(x)|}{1 + x^2} \ dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi\|_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} \left\| \frac{1}{1 + x^2} \right\|_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} \\ &\leq \sqrt{M} \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} \left\| \frac{1}{1 + x^2} \right\|_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché

$$\left\| \frac{1}{1 + x^2} \right\|^2_{L^2(n \leq |x| \leq n+1)} = 2 \int_{n}^{n+1} \frac{1}{(1 + x^2)^2} \ dx \leq 2 \int_{n}^{n+1} \frac{1}{\left[1 + n^2\right]^2} = \frac{2}{\left[1 + n^2\right]^2} \,,$$

da (2) si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|}{1 + x^2} \ dx \leq \sqrt{2M} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1 + n^2} < +\infty \,,$$

come si voleva.

Con la stessa tecnica si può dimostrare che se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soddisfa

$$\exists M, \alpha > 0 : \frac{1}{T^\alpha} \int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 \ dx \leq M \quad \forall T \geq 1$$

allora φ è a crescita lenta e dunque definisce una distribuzione temperata. Infatti, denotando con $[\alpha]$ la parte intera di α,

$$[\alpha] = \max\left\{n \in \mathbb{Z} : n \leq \alpha\right\}.$$

la funzione

$$\zeta_\alpha(x) = \frac{\varphi(x)}{1 + |x|^{2+[\alpha]}}$$

risulta sommabile su $\mathbb{R}$.

Segnali periodici a energia finita

Un segnale periodico a energia finita è una funzione periodica $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi \in L^2(-\tau/2, \tau/2)$, dove $\tau > 0$ è un periodo della funzione. Dimostriamo che φ è allora un segnale a potenza finita, cosicché definisce una distribuzione temperata. Sia $T \geq 1$, e chiamiamo $n = [T/\tau] \in I\!N$, parte intera di T/τ, per cui vale $n\tau \leq T < (n+1)\tau$. Sfruttando il fatto che φ è τ-periodica, si ha

$$\int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 \, dx \leq \int_{-(n+1)T}^{(n+1)T} |\varphi(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-(n+1)}^{n} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} |\varphi(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-(n+1)}^{n} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\varphi(x)|^2 \, dx$$

$$= 2(n+1)\|\varphi\|^2_{L^2(-\tau/2,\tau/2)} \leq 2\left(\frac{T}{\tau} + T\right)\|\varphi\|^2_{L^2(-\tau/2,\tau/2)},$$

e quindi (1) è verificata con

$$M = 2\frac{\tau+1}{\tau}\|\varphi\|^2_{L^2(-\tau/2,\tau/2)}.$$

Dimostriamo che la trasformata di Fourier di φ nel senso di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si scrive

$$\widehat{\varphi} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{2k\pi/\tau} \tag{3}$$

dove $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è la successione dei coefficienti di Fourier di φ,

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \varphi(x) e^{-2\pi i k x/\tau} \, dx.$$

In particolare, si può notare da (3) che la trasformata $\widehat{\varphi}$ è un treno di impulsi, dove l'ampiezza del k-esimo impulso è $2\pi c_k$. Per dimostrare (3), per prima cosa proviamo che la serie al secondo membro converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Fissata $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k \delta_{2k\pi/\tau}, v \right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k v(2k\pi/\tau),$$

e il limite esiste finito perché la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k v(2k\pi/\tau)$$

è assolutamente convergente. Infatti, grazie alla disuguaglianza di Young si ottiene

$$\big|c_k v(2k\pi/\tau)\big| \le \frac{1}{2}\big(|c_k|^2 + |v(2k\pi/\tau)|^2\big)\,.$$

La serie $\sum_k |c_k|^2$ è convergente perché $\varphi \in L^2(-\tau/2,\tau/2)$ e quindi vale l'identità di Parseval. La serie $\sum_k |v(2k\pi/\tau)|^2$ converge perché v è a decrescenza rapida, e quindi esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|v(2k\pi/\tau)| \le C\frac{\tau}{2|k|\pi + 1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui si conclude. Consideriamo ora la serie di Fourier di φ

$$s[\varphi](x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i k x/\tau}\,.$$

Come è noto, tale serie converge a φ in $L^2(-\tau/2,\tau/2)$. Dimostriamo che converge anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sia $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e denotiamo con $s_n[\varphi]$ la ridotta n-esima della serie di Fourier di φ, cosicché vale

$$\lim_{n\to+\infty} \|s_n - \varphi\|_{L^2(-\tau/2,\tau/2)} = 0\,.$$

Essendo $s_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, essa definisce una distribuzione temperata. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la periodicità delle funzioni $s_n[\varphi]$ e φ, si ottiene

$$\begin{aligned}\big|\langle s_n[\varphi], v\rangle - \langle \varphi, v\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \big[s_n[\varphi](x) - \varphi(x)\big] v(x)\, dx\right| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} \big|s_n[\varphi](x) - \varphi(x)\big| |v(x)| \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|s_n[\varphi] - \varphi\|_{L^2(-\tau/2,\tau/2)} \|v\|_{L^2((k-1/2)\tau),(k+1/2)\tau)}\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Poiché $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|v(x)| \le \frac{C}{1+x^2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^2((k-1/2)\tau),(k+1/2)\tau)} &= \int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} |v(x)|^2\, dx \le C^2 \int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \\ &\le \frac{C^2\tau}{\big[1 + (|k| - 1/2)^2\tau^2\big]^2}\,.\end{aligned}$$

Usando questa disuguaglianza in (4), si deduce che

$$\big|\langle s_n[\varphi] - \varphi, v\rangle\big| \le \|s_n[\varphi] - \varphi\|_{L^2(-\tau/2,\tau/2)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{C\sqrt{\tau}}{1 + (|k| - 1/2)^2\tau^2} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty\,,$$

essendo la serie al secondo membro convergente. Adesso, poiché

$$s_n[\varphi] \xrightarrow{\mathcal{S}'} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{s_n[\varphi]} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{\varphi}\,, \tag{5}$$

essendo

$$\widehat{s_n[\varphi]} = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} c_k \delta_{2k\pi/\tau} \,,$$

e avendo già dimostrato che la serie al secondo membro di (3) converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, da (5) si ottiene (3), come si voleva.