ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2007-2008

1 Successioni e serie di funzioni

1.1 Introduzione

In questo capitolo studiamo la convergenza di successioni del tipo

$$n \mapsto f_n\,,$$

dove le f_n sono tutte funzioni a valori reali (o complessi), definite in uno stesso dominio D (spesso un intervallo di $\mathbb{R}$). In primo luogo dobbiamo *definire* cosa si intende per convergenza; capiremo (ci limiteremo ad un caso) che le definizioni date sono dello stesso tipo di quelle date per la convergenza delle successioni di numeri reali, sono cioè basate su un opportuno concetto di *intorno* di una funzione, o meglio su un concetto di *palla*, o disco, centrata in una funzione simile a quello di intervallo centrato in un numero reale. Dopo le definizioni di convergenza e i relativi esempi, passeremo a studiare quali proprietà "si conservano al limite. Dimostreremo per esempio che – sotto alcune ipotesi – il limite degli integrali [risp. derivate] è l'integrale [risp. derivata] del limite. Osserviamo infine che una serie di funzioni è un caso particolare di successione di funzioni – giacché la successione delle ridotte è una successione di funzioni – allo stesso modo in cui una serie è un caso particolare di successione.

1.2 Definizioni di convergenza

Convergenza puntuale

Definizione 1 *Siano D un insieme non vuoto, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e $f : D \to \mathbb{C}$ funzioni. Si dice che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in D se, per ogni $x \in D$, la successione numerica $\{f_n(x)\}$ ha per limite $f(x)$. Si dice che la serie di funzioni $\sum_n f_n$ converge puntualmente a f se la successione delle ridotte $\{\sum_{k=0}^n f_k\}$ converge putualmente a f.*

L'aggettivo "puntuale significa che la successione converge per ogni punto del dominio. Si potrebbe ricondurre questo tipo di convergenza allo schema generale del concetto di limite, definendo una famiglia di intorni per una funzione f; ciò esula dagli scopi del nostro corso.
Esempi. 1) Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Questa successione di funzioni non ha limite puntuale in $\mathbb{R}$, perché per $|x| > 1$ e per $x = -1$, x^n non converge. Invece in $]-1, 1]$ converge puntualmente. Infatti, come già visto,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < 1 \\ 1 & \text{per } x = 1. \end{cases}$$

Posto $f(1) = 1, f(x) = 0$ per $|x| < 1$, la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in $]-1, 1]$. Osserviamo che, pur essendo le f_n continue per ogni n, il limite puntuale f è discontinuo.

2) Poniamo

$$f_n(x) = e^{-n|x|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Non è difficile verificare che f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

3) Poniamo

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{per } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f \equiv 0$ (dimostrarlo!!). Idem per la successione di funzioni (detta "doppietto")

$$f_n(x) = \begin{cases} -n & \text{per } -1/n < x < 0 \\ n & \text{per } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

4) Anche la successione $\{n \sin(x/n)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (a cosa ?).
5) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Consideriamo la successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = n(\varphi(x + \frac{1}{n}) - \varphi(x)).$$

È chiaro che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è puntualmente convergente e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x).$$

6) Disegnare il grafico e studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(x + 1/n) & \text{per } -1/n < x < 0 \\ n^2(1/n - x) & \text{per } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Esercizio. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni crescenti aventi f come limite puntuale. Provare che f è crescente.

Uno dei principali intenti nel definire la convergenza di successioni di funzioni è quello di fare in modo che proprietà importanti verificate da tutte le funzioni della successione siano mantenute anche dalla funzione limite. Come si vede dall'esercizio precedente, la monotonia viene effettivamente mantenuta al limite. Questa è anche una delle pochissime proprietà rispettata dal limite puntuale. Vediamo infatti il seguente esempio.

Esempio. Consideriamo la successione di funzioni date da

$$f_n(x) = \frac{x}{x^4 + \frac{1}{n}}.$$

Verificare che il limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in I\!N}$ è

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f e delle f_n e verificare che ciascuna delle funzioni f_n è limitata, continua, derivabile (anzi di classe C^∞), integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$. Invece il limite puntuale non è limitato, nè continuo, nè localmente integrabile.

L' esempio precedente motiva la ricerca di una definizione di limite diversa da quello puntuale, per una successione di funzioni.

Convergenza uniforme

Definizione 2 *Siano D un insieme non vuoto, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in I\!N$, e $f : D \to \mathbb{C}$ funzioni. Si dice che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in I\!N}$ converge uniformemente a f (in simboli, $f_n \rightrightarrows f$) in D se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| = 0\,.$$

Si dice che la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente a f se la successione delle ridotte converge uniformemente a f.

È ovviamente essenziale capire la differenza fra convergenza puntuale ed uniforme. In primo luogo è evidente che

Proposizione 1 *Se una successione di funzioni converge uniformemente a f in D, allora converge a f puntualmente in D.*

Infatti, f_n converge puntualmente ad f in D, se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0 \text{ per ogni } x \in D\,;$$

tuttavia, come vedremo, non necessariamente

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Più precisamente, un modo per esprimere la convergenza puntuale in D è il seguente:

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in D, \quad \exists n_{\varepsilon,x} \,:\, n > n_{\varepsilon,x} \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,;$$

la scrittura $n_{\varepsilon,x}$ evidenzia che $n_{\varepsilon,x}$ *dipende sia da ε che da x*. Un modo per esprimere la convergenza uniforme, invece, è (per la definizione di limite):

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \,:\, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D\,.$$

La differenza consiste quindi nel fatto che, nel secondo caso, n_ε *non dipende da x*, è cioè uniforme rispetto ad $x \in D$. La definizione di convergenza uniforme può essere ricondotta allo schema noto di limite con gli intorni. Si può definire come intorno (per la "topologia della convergenza uniforme) di una funzione f ogni insieme che contenga, per qualche $\varepsilon > 0$, un insieme del tipo

$$\left\{g : D \to \mathbb{R} \,:\, \sup_{x \in D} |g(x) - f(x)| < \varepsilon\right\}.$$

Il significato geometrico dell'insieme precedente è chiarito dalla figura seguente: di tale insieme fanno parte tutte le funzioni il cui grafico appartiene ad un "tubo di semiampiezza ε, centrato nel grafico di f (v. la figura nel testo a p. 12).

Mostriamo come ci possa effettivamente essere convergenza puntuale senza che quella uniforme abbia luogo.

Esempio. La successione x^n non converge uniformemente in $]-1,1]$ e neppure in $]-1,1[$. Converge, invece, uniformemente a 0 in $[a,b]$ per ogni coppia a,b con $-1 < a < b < 1$. Dalla Proposizione 1 ricaviamo che, se vi è convergenza uniforme, la funzione limite deve coincidere con il limite puntuale f. Calcoliamo allora

$$\sup_{x \in]-1,1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} |x|^n = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ovviamente ciò dice che non vi è convergenza uniforme. Invece la convergenza uniforme in $[a,b]$ ha luogo, perché $\sup_{x \in [a,b]} |x|^n = \big(\max\{|a|,|b|\}\big)^n \to 0$.

Esercizi vari. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \; g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

Svolgimento. È evidente che $f_n(x) \longrightarrow 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per controllare la convergenza uniforme, cerchiamo il sup di $|f_n(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ cioè il massimo fra $|\sup f_n|$ e $|\inf f_n|$. Con facili calcoli si ottiene che il massimo è raggiunto in $1/\sqrt{n}$ e il minimo in $-1/\sqrt{n}$. Il massimo di $|f_n|$ è $1/(2\sqrt{n}) \longrightarrow 0$; f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla costante 0. Per quanto riguarda g_n, osserviamo che converge puntualmente alla funzione segno, cioè a

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Per studiare la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ dobbiamo quindi trovare

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - \operatorname{sign}(x)|.$$

Non è difficile dimostrare che tale sup è 1 (si osservi anche che il sup non è un massimo; ciò non deve stupire, perché la funzione di cui trovare l'estremo superiore non è continua, e l'insieme non è limitato). La successione quindi non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Provare che invece converge uniformemente nel complementare di ogni intervallo aperto che contiene l'origine.

Osservazione. Nella risoluzione degli esercizi sulla convergenza uniforme, può essere utile notare che, se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora

$$\begin{aligned}\sup_{x\in D}|f(x)| &= \sup_{x\in D}\max\{f(x),-f(x)\} = \max\{\sup_{x\in D}f(x),\sup_{x\in D}-f(x)\}\\ &= \max\{\sup_{x\in D}f(x),-\inf_{x\in D}f(x)\}.\end{aligned}$$

Proposizione 2 (Criterio per la convergenza uniforme di una successione di funzioni) *Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in D ed f il suo limite puntuale. Se esiste una successione infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ tale che*

$$|f_n(x) - f(x)| \le a_n, \quad \textit{per ogni } x \in D,$$

allora $f_n \rightrightarrows f$ in D.

La dimostrazione del criterio è immediata e si lascia per esercizio. Vale comunque la pena di sottolinearlo perchè fa notare come per provare la convergenza uniforme non sia necessario calcolare esplicitamente i $\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$, ma sia sufficiente trovarne una stima con una successione infinitesima.

Esempio. Consideriamo la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ove $f_n(x) = \frac{\sin(nx+x^2)}{n}$. È chiaro che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed inoltre $|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$, dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Il calcolo esplicito di $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$ potrebbe invece sembrare più laborioso.

Un importante ed utile criterio per la convergenza uniforme delle serie di funzioni è il seguente:

Teorema 1 (Criterio di Weierstrass) *Siano $f_n : D \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) funzioni e siano c_n numeri reali positivi. Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$|f_n(x)| \le c_n \qquad \forall x \in D$$

e la serie $\sum c_n$ converge, allora la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in D.

Una serie di funzioni che soddisfa le ipotesi del teorema precedente si dice spesso una serie *totalmente convergente.* Il criterio di Weierstrass si esprime allora dicendo che la convergenza totale implica la convergenza uniforme.

Dimostrazione. Per il criterio del confronto, la serie $\sum f_n(x)$ converge assolutamente e quindi converge, per ogni $x \in D$; chiamiamo f la sua somma puntuale e poniamo $C = \sum c_n$. Dobbiamo mostrare che la successione delle ridotte converge uniformemente a f. Si ha

$$\begin{aligned}\sup_{x\in D}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| &= \sup_{x\in D}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le\\ \le \sup_{x\in D}\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = C - \sum_{k=0}^{n} c_k\,.\end{aligned}$$

L'ultima espressione tende ovviamente a 0 per $n \to \infty$. La dimostrazione è conclusa. $\square$

Il precedente criterio ha molte applicazioni. Studiamo dapprima la serie geometrica.

Esempio. Ricordiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

converge puntualmente a $1/(1-z)$ in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. In tale insieme non converge uniformemente. Infatti

$$\sup_{|z|<1} \left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \sup_{|z|<1} \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = +\infty\,.$$

Usando il criterio di Weierstrass si vede subito che la serie geometrica converge uniformemente in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le r\}$ per ogni $0 < r < 1$, perché in tale insieme $|z^n| \le r^n$, ed essendo $r < 1$, $\sum r^n < +\infty$.

Esercizi. 1) Provare che la serie esponenziale converge uniformemente in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le r\}$ per ogni $r > 0$.
2) Provare che per ogni $\alpha > 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

1.3 Teoremi di passaggio al limite

I seguenti risultati contengono condizioni sufficienti affinché alcune proprietà dei termini di una successione di funzioni si conservino al limite; alcuni fra gli esercizi finali mostrano come, in assenza di ipotesi, tali proprietà non siano in generale più verificate.

Il primo teorema riguarda la continuità del limite uniforme di funzioni continue.

Teorema 2 *Siano D un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e $f : D \to \mathbb{C}$ funzioni. Se tutte le f_n sono continue in $x_0 \in D$ e $f_n \longrightarrow f$ uniformemente in D, allora anche f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che si ha, per ogni $x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Per la continuità di f_n, esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. Ne segue che, per $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(x_0)| \le \\ &\quad \le \;\; |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\quad \le \;\; \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa. $\square$

Il precedente risultato può essere usato negli esercizi anche per dimostrare che una successione di funzioni continue *non* converge uniformemente in un certo intervallo. Ad esempio, si vede subito che la successione geometrica non converge uniformemente in $]-1,1]$, perché il limite puntuale è discontinuo in 1. Tuttavia la continuità del limite puntuale non dà nessuna informazione sulla convergenza uniforme negli intervalli chiusi strettamente contenuti in $]-1,1]$.

Teorema 3 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni definite nell' intervallo* $[a,b]$ *tale che* $f_n \rightrightarrows f$. *Se ogni* f_n *è integrabile secondo Riemann in* $[a,b]$, *anche* f *è Riemann integrabile in* $[a,b]$ *e si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Proviamo il risultato solo nel caso in cui le funzioni f_n della successione siano continue. Sappiamo allora che anche il loro limite uniforme f è una funzione continua e quindi Riemann integrabile nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Per le proprietà dell' integrale su intervalli orientati scriviamo ora la stima

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x)-f_n(x))\,dx\right| \le \\ &\le \left|\int_a^b \Big|f(x)-f_n(x)\Big|\,dx\right| \le \left|\sup_{z\in[a,b]}|f(z)-f_n(z)|\int_a^b dx\right| \\ &= |b-a|\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|,\end{aligned}$$

da cui segue il risultato per definizione di convergenza uniforme. □

Osservazione. Facciamo notare che la dimostrazione del teorema precedente verifica in realtà il fatto che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx = 0.$$

Teorema 4 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni derivabili definite nell' intervallo* $[a,b]$. *Se esistono una funzione* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_o\in[a,b]$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tali che*

$$\frac{df_n}{dx}\rightrightarrows g \qquad e \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x_o)=\lambda,$$

allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente ad una funzione* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *derivabile e tale che*

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty} f_n = \frac{df}{dx} = g = \lim_{n\to+\infty}\frac{df_n}{dx}.$$

Perciò f *è quella primitiva* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *di* g *tale che* $f(x_o)=\lambda$.

Se in particolare le funzioni f_n *sono di classe* C^1, *allora* g *è continua e quindi*

$$f(x)=\lambda+\int_{x_0}^x g(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Proviamo il risultato solo nel caso in cui le funzioni f_n della successione siano di classe C^1. Per il teorema fondamentale del calcolo possiamo allora scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n'(t)\, dt, \qquad \text{per ogni } x \in [a,b]. \tag{1}$$

Per il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo dunque il limite puntuale

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lambda + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt =: f(x),$$

che definisce una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrale indefinito di g. Poichè per il Teorema 2 la funzione g è continua, possiamo allora affermare che f è derivabile (anzi di classe C^1) e si ha $\frac{df}{dx} = g$.

Proviamo infine che la convergenza della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in realtà uniforme. Usando la definizione di f, la formula (1), la disuguaglianza triangolare per il modulo e le proprietà dell' integrale, scriviamo la stima seguente.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_o) - \lambda| + \left| \int_{x_o}^{x} \frac{df_n}{dx}(t)\, dt - \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt \right| \\
&\leq |f_n(x_o) - \lambda| + \left| \int_{x_o}^{x} |\frac{df_n}{dx}(t) - g(t)|\, dt \right| \\
&\leq |f_n(x_o) - \lambda| + |b-a| \sup_{z\in[a,b]} |\frac{df_n}{dx}(z) - g(z)|.
\end{aligned}$$

Poichè il termine alla destra delle disuguaglianze non dipende da $x \in [a,b]$ ed è quindi maggiorante dell' insieme $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$, concludiamo allora che

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_o) - \lambda| + |b-a| \sup_{z\in[a,b]} |\frac{df_n}{dx}(z) - g(z)|,$$

dove ancora il termine a destra è infinitesimo per $n \to +\infty$, per le nostre ipotesi. Possiamo allora concludere per definizione di convergenza uniforme. $\square$

I teoremi di passaggio al limite per le successioni di funzioni possono essere riformulati per le serie di funzioni. Si ha quindi, in particolare,

Teorema 5 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a S uniformemente in $[a,b]$. Allora:*

1) S è continua in $[a,b]$;

2) $\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

Esercizio. La funzione e^{-x^2} non ha, com'è noto, una primitiva esprimibile elementarmente. Calcoliamone lo sviluppo in serie di McLaurin. Si ha

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\,,$$

e la serie converge uniformemente (provarlo) in ogni intervallo limitato. Si ha perciò, per il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\,.\end{aligned}$$

1.4 Esercizi vari

1) (Tema d'esame di Analisi Matematica I, luglio '95) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan[(x+1)^n], \qquad x \in \mathbb{R}\ :$$

a) se ne studi la convergenza puntuale;

b) si dimostri che converge uniformemente in $[-1, -1/2]$;

c) si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-1/2} f_n(x)\,dx\,.$$

2) Dimostrare che la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione $|x|$. Osservare che la funzione limite non è derivabile; cioè la convergenza uniforme della successione non è sufficiente ad assicurare la derivabilità del limite.

Si consideri ora la successione $g_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$. Se ne calcoli il limite puntuale g e si provi che è uniforme. Si dica se g_n' converge puntualmente a g'.

3) Dimostrare che la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{per } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

non converge uniformemente in $[0, 1]$. Dimostrare che non ha luogo il passaggio al limite sotto il segno di integrale; osservare, quindi, che la convergenza puntuale non è sufficiente per assicurare tale passaggio al limite.

4) Dimostrare che la successione di funzioni $f_n(x) = n\log(1 + x/n)$ converge uniformemente (a cosa ?) in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$, $a > 0$.

5) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx} \qquad x \ge 0\,.$$

Trovarne il limite puntuale f e dimostrare che non ha luogo la convergenza uniforme in $[0, +\infty[$. È vero che $f_n' \longrightarrow f'$ puntualmente? Si passa al limite sotto il segno di integrale in ogni intervallo del tipo $[0, a]$?

6) Data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \setminus [-1, 0] \to \mathbb{R}$, dove

$$f_n(x) = \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^n .$$

(i) Determinare l'insieme di convergenza $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed il limite puntuale $f : D \to \mathbb{R}$.

(ii) C'è convergenza uniforme di f_n ad f su D? o almeno, fissato $a < \sup D$, si ha convergenza uniforme in $]-\infty, a] \cap D$?

7) Sia k un numero naturale fissato. Si dimostri che se $\alpha > k + 1$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

converge in $\mathbb{R}$ ad una funzione di classe $\mathcal{C}^k$.
8) Si ponga

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

(seno integrale di x). Si dia per noto lo sviluppo in serie di Mc Laurin

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Si calcoli lo sviluppo in serie di McLaurin di $\mathrm{Si}(\cdot)$, giustificando tale calcolo mediante i teoremi di convergenza per le serie di funzioni.
9) (Dal compito del 16/12/2004) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^n \chi_{[\sqrt{n}-2, \sqrt{n}]}(t), \qquad n \in I\!N.$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ di $\{f_n(t)\}$.
Svolgimento. Per ogni t fissato, $f_n(t)$ è definitivamente costante ed uguale a 0. Perciò f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione nulla. Siccome $\max_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = n^n \to +\infty$, non c'è convergenza uniforme.
10) (Dal compito del 20/9/2005) Sia $\{f_n\}$, $n \in I\!N, n > 0$ la successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } 1/n \le |x| \le n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire se la successione f_n converge a f puntualmente o uniformemente in $\mathbb{R}$.
11) (Adattato dal compito dell'8.9.06) Sia f_n la successione definita da

$$f_n(t) = \chi_{P_n}(t), \qquad P_n = [2, 2 + \frac{1}{2^2}] \cup [3, 3 + \frac{1}{3^2}] \cup ... \cup [n, n + \frac{1}{n^2}],\ t \in \mathbb{R},\ n \ge 2.$$

1. Disegnare il grafico di f_n (ricordare che $\chi_A(\cdot)$ indica la funzione caratteristica di un insieme A);
2. studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione f_n in $\mathbb{R}$;
3. studiare la convergenza uniforme della successione f_n in $[0, R]$, per ogni $R > 0$ fissato.

12) (Dal compito del 8.1.07) Si studino la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-n|x|}.$$

13) (Dal compito del 20.9.07) Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (\tanh x) \cdot e^{-|x-n|} & \text{se} \quad x > 0\,, \\ e^{-n} & \text{se} \quad x \leq 0\,, \end{cases}$$

(si ricordi che $\tanh x = \sinh x / \cosh x$).

1. Si calcoli il limite puntuale di $\{f_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to +\infty$.
2. Si verifichi se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ oppure in $[-1, 1]$.