ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2006-2007

Esercizi e complementi sulle trasformate di Fourier

Disuguaglianza di Young: Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Allora $f * g(x)$ è definita per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ e vale

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p \,.$$

Dim.: Consideriamo solo il caso $p = 1$. Osserviamo che la funzione

$$\psi(x, y) \doteq f(x - y)g(y)$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Infatti, usando il teorema di Tonelli e osservando che per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| \; dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \; dt = \|f\|_1 \,,$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |\psi(x, y)| \; dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x - y)g(y)| \; dxdy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| \; dx \right] \; dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \|f\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dal Teorema di Fubini si deduce allora che per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$y \mapsto f(x - y)g(y)$$

è misurabile e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e quindi

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \; dy$$

è ben definita q.o. Inoltre, usando (1), si ottiene che

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| \; dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \; dy \right| \; dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| \; dy \right) \; dx = \iint_{\mathbb{R}^2} |\psi(x, y)| \; dxdy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 \,, \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione.

Esercizi sulla trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

0) Giustificare i calcoli della trasformate della tabella a p. 251 del testo. Svolgere gli esercizi 6.2-2, -3, -4, -5 a p. 255 del testo.

1) (De Marco) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = e^{-3x}$ per $x \geq 0$ (risultato: $i/(3i - \omega)$).

2) (Mariconda) Sia

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 3}.$$

i) Mostrare che f è sommabile in $\mathbb{R}$.

ii) Provare che $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

iii) Calcolare, usando il metodo dei residui, la trasformata di Fourier di f in $\omega < 0$; dedurne poi l'espressione per $\omega > 0$ e per $\omega = 0$.

(risultato: $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(e^{-(\sqrt{2}+i)\omega} H(\omega) + e^{(\sqrt{2}-i)\omega} H(-\omega) \right)$)

3) Calcolare la trasformata inversa di Fourier della funzione

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(4\pi^2\omega^2 + 1)^2}$$

con metodi di variabile complessa. Dedurne il valore di un opportuno prodotto di convoluzione.

(risultato: $f(x) = \frac{e^{-|x|/(2\pi)}(|x|+2\pi)}{16\pi^2}$).

4) Dire se le funzioni

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}, \ g(x) = \frac{x \sin x}{1 - x + x^2}$$

sono sommabili e se sono a quadrato sommabile su $\mathbb{R}$. Calcolare poi la trasformata di Fourier di f e g.

5) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$$

(sugg.: usare, giustificando i passaggi, la "formula di dualità").

6) (20.9.2005) Sia

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}.$$

a. Si dimostri che $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$;

b. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x)$.

7) (13.7.06) Sia $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+4}$.

(i) Dimostrare che $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$;

(ii) calcolare la trasformata di Fourier di f;

(iii) dimostrare che $g(x) := xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e calcolare la trasformata di Fourier di g; dedurne che $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

8) (8.9.06) Sia $f(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$.

1. Determinare la trasformata di Fourier di f e discuterne le eventuali proprietà di continuità e di simmetria;

2. dedurre il valore dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^3} \cos \frac{\xi}{2} d\xi.$$

9) (22.9.06) a) Si studino le singolarità di

$$g(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}.$$

b) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si calcoli la trasformata di Fourier di f.

Complementi ed esercizi sulla trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Il teorema di Plancherel va completato con il seguente enunciato:

La trasformata di Fourier è una biiezione lineare e continua insieme con la sua inversa da $L^2(\mathbb{R})$ in sé.

Non dimostriamo l'iniettività e la suriettività di $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. La trasformata inversa è data da

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(\omega)\, d\omega.$$

La continuità di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ sono conseguenze immediate dell'identità di Parseval.

1) (De Marco) Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t \sin t}{1 + t^2}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier in L^2 e da essa dedurre che f non è sommabile in $\mathbb{R}$.

2) (Mariconda) i) Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

è sommabile e se è a quadrato sommabile su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$ di $f(x)$.

(risultato: $\hat{f}(\omega) = -2i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\,e^{-|\omega|}$)

3) Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, si definisca, per $R > 0$ fissato,

$$g_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega;$$

si provi che, per ogni $g \in G = \{g \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, \hat{g}(\omega) = 0 \ \text{ se } |\omega| > R\}$, si ha

$$\|f - g_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Svolgimento. L'identità di Parseval dà

$$\|f - g_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f} - \hat{g_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

Ora, g_0 è l'antitrasformata di Fourier di $\hat{f}\chi_{[-R,R]}$, pertanto la sua trasformata coincide con $\hat{f}\chi_{[-R,R]}$. Il secondo membro di (2) diventa allora

$$\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}(1 - \chi_{[-R,R]})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\{|\omega|>R\}} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{3}$$

Sia ora $g \in G$. Per l'identità di Parseval si ha ancora

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\|\hat{f} - \hat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\{|\omega|<R\}} |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)|^2\,d\omega + \int_{\{|\omega|>R\}} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Un confronto tra (4) e (3) conclude la dimostrazione.

Interpretazione del risultato: fra i segnali a banda limitata da R, g_0 è quello che meglio approssima f nella norma di $L^2(\mathbb{R})$.

4) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $g \in L^1(\mathbb{R})$. Provare che

(i) $f * g$ è definita e appartiene a $L^2(\mathbb{R})$;

(ii) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Svolgimento. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Si ha che $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ e inoltre $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$ (**provarlo!**). Per il teorema sulla convoluzione, $\widehat{f_n * g} = \hat{f}_n\hat{g}$. Ricordando il teorema di Plancherel, $\hat{f}_n \to \hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R})$ e quindi, poiché $\hat{g}$ è limitata, con un calcolo epslicito si ottiene che $\widehat{f_n * g} = \hat{f}_n\hat{g} \to \hat{f}\hat{g}$ in $L^2(\mathbb{R})$ (**provarlo!**). Antitrasformando e usando la continuità dell'antitrasformata, risulta che $f_n * g$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ ad una funzione, che chiamiamo $f * g$, la cui trasformata di Fourier è ovviamente $\hat{f}\hat{g}$.

5) Si consideri la successione di funzioni $\{g_n(x)\}_{n\geq 1}$ definita da

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

si provi che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione $f * g_n$ è ben definito, appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e inoltre $f * g_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$ (sugg.: usare l'esercizio 4).

6) Si calcoli una soluzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\frac{1}{y^2+a^2}\, dy = \frac{1}{x^2+b^2},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$.