Dalla cosmologia antica alla relatività generale (un'escursione)

Mathesis, Padova, 24 maggio 2024

Franco Cardin

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita

1222·2022 800 ANNI UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

E' ben nota la 'catena evolutiva del pensiero' sulla struttura del **sistema planetario**:
• Aristotele (geoc.),
• Aristarco di Samo (elioc.)
• Tolomeo (geoc.),
• Copernico (elioc.), Keplero (elioc.), Galileo (elioc.), Newton (elioc.)

Siamo interessanti all'evoluzione della **cosmologia antica** e alla sua caduta.
Ora, la catena evolutiva sarà:

• **Ipparco**
• **Tolomeo**,
• **Halley**

La rimozione definitiva dell'idea di 'stelle fisse' (Halley, nel '700), condusse alla critica radicale del concetto di 'spazio inerziale' (Mach), sintetizzata da Einstein come 'Principio di Mach'. Con la moderna definizione di curvatura, e della Relatività Generale, si è giunti alle attuali proposte cosmologie.

Un progetto millenario. (ref: Lucio Russo)

• **Ipparco** (Nicea, 200 a.C. - Rodi, 120 a.C.), compie misure accurate delle ‘stelle fisse’,

Plinio riferisce che Ipparco si era chiesto se le stelle apparentemente fisse non si muovessero in realtà con moti troppo lenti per essere osservati nell’arco di una vita umana. Aveva perciò deciso di misurare le coordinate di tutte le stelle visibili, *lasciando ai posteri il compito di verificare* se si fossero spostate e anche di verificare se fosse apparsa qualche stella nuova o se qualcuna fosse scomparsa.

• **Tolomeo** (Pelusio, 100 d.C. circa - Alessandria d'Egitto, 175 d.C. circa), riprende quelle misure e ne compie ulteriori, infine

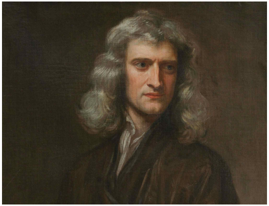
CLAUDIO TOLOMEO

• **Halley** (Haggerston, 1656 - Greenwich 1742).

Le cosiddette **stelle fisse** in realtà si muovevano, non potevano quindi essere fissate ad alcuna sfera materiale. Questa scoperta fondamentale si deve a Edmond Halley, che nel 1718, confrontando le coordinate da lui misurate di alcune stelle, **Sirio, Arturo e Aldebaràn.**

Questo piano secolare non è molto noto.
Crolla così la **cosmologia antica,**
della volta celeste
e delle stelle fisse.

Precedentemente **Isaac Newton** (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 1642 - Londra, 1726)



benché di fede eliocentrica, non aveva dubbi:

credeva invece fortemente nella cosmologia antica, nella volta celeste e nelle stelle fisse.

Nell'intermezzo di questa sequenza storica sulle 'stelle fisse', di Ipparco, Tolomeo, Halley,

guardiamo per un momento alla **Cosmologia Medioevale Dantesca**

Dante, affresco giottesco al Bargello

Ritroveremo una visione matematica inaspettata dell'universo

L'idea di universo che scaturisce in Dante:

Esiste la terra, è una sfera piena, con un 'pozzo', l'*inferno*, che da Gerusalemme va giù, giù, fino al centro della terra.
Un cunicolo infine conduce agli antipodi di Gerusalemme, alla montagna del *purgatorio*.
Poi, il cielo.
Al di sopra della terra, concentrici ad essa, ruotano i **nove cieli**.
Dall'ultimo, detto **primo mobile**, si sviluppa, adagiata su di esso, esattamente un'altra sfera, l'empireo, con i suoi **nove ordini** delle intelligenze motrici –gli angeli– al cui centro c'è la divinità. Ecco il *paradiso*. Fine.

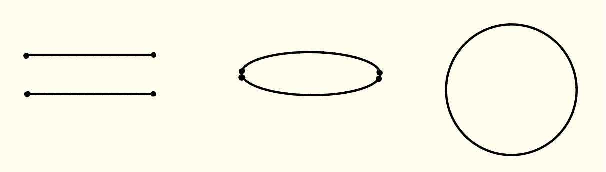
L'universo di Dante è dunque finito: appare come **l'unione di due sfere piene**, ciascuna rappresentata dal disco pieno compatto 3-dimensionale
$\mathbb{D}^3 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.
Tale unione è operata mediante l'incollamento dei loro due bordi, ciascuno denotato da $\partial\mathbb{D}^3$.
Qual è il prodotto di tale operazione? La risposta è (un oggetto omeomorfo a) $\mathbb{S}^3$:

$$\mathbb{S}^3 = \mathbb{D}^3_{(1)} \bigcup_{\partial\mathbb{D}^3_{(1)} = \partial\mathbb{D}^3_{(2)}} \mathbb{D}^3_{(2)}$$

Ma cos'è $\mathbb{S}^3$?
$\mathbb{S}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$
Proviamo a rendercene conto induttivamente.

Consideriamo **due dischi pieni 1-dimensionali,** $\mathbb{D}^1_{(1)}$ e $\mathbb{D}^1_{(2)}$, sono naturalmente due segmenti!
Se li incolliamo attraverso i loro bordi, ciascuno consistente dei due punti estremi, realizziamo un cerchio, cioè $\mathbb{S}^1$:

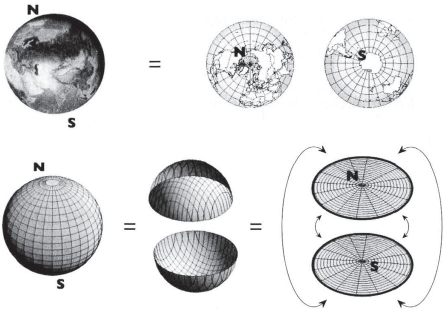
$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{D}^1_{(1)} \bigcup_{\partial\mathbb{D}^1_{(1)} = \partial\mathbb{D}^1_{(2)}} \mathbb{D}^1_{(2)}$$



Costruzione di $\mathbb{S}^1$.

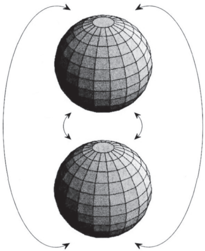
Andiamo avanti, consideriamo ora **due dischi pieni 2-dimensionali**, $\mathbb{D}^2_{(1)}$ e $\mathbb{D}^2_{(2)}$. Se incolliamo questi due piattelli attraverso i loro bordi, ciascuno consistente di un $\mathbb{S}^1$, realizziamo la superficie sferica $\mathbb{S}^2$:

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}^2_{(1)} \bigcup_{\partial\mathbb{D}^2_{(1)} = \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2_{(2)}} \mathbb{D}^2_{(2)}$$



Il passo successivo è il punto esattamente da cui siamo partiti.

$$\mathbb{S}^3 = \mathbb{D}^3_{(1)} \bigcup_{\partial\mathbb{D}^3_{(1)} = \mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{D}^3_{(2)}} \mathbb{D}^3_{(2)}$$



Matematicamente la cosmologia dantesca si rappresenta dunque come la sfera 3-dimensionale $\mathbb{S}^3$:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}$$

Un universo *illimitato ma finito*.

È interessante notare che questa interpretazione di Dante (ma forse di Plotino), benché molto naturale, sembra sia stata messa in luce solo nel 1979 da M. A. Peterson.

Tale intuizione matematica è stata ripresa da H. R. Patapievici.

Il lettore incuriosito è invitato a leggere la sezione ‘Il cosmo’, pp. 83-95, del libro di C. Rovelli:
• *La realtà non è come ci appare. La struttura elementare delle cose* Ed. Cortina Raffaello, 2014, 241 pp.

e così pure il volume di **J. R. Weeks**:

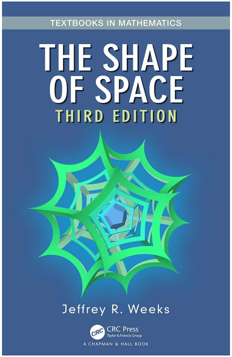
The Shape of Space, 3rd Edition, Chapman and Hall/CRC, 362 pp.

dove dettagli (matematici, fisici e artistici)

sono ben descritti.

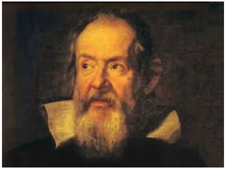
Il nostro carissimo Frank Sullivan lo stava

traducendo in italiano.



Il principio di relatività classico, che comunemente chiamiamo Galileiano-Newtoniano, **ha una storia tormentata.**

Nel 1584 **Giordano Bruno** propose nel Dialogo terzo de *"La cena delle Ceneri"*, la sua versione di un proto-principio di relatività:

Anticipando Galileo di quasi mezzo secolo, discute il famoso esempio della *'Nave'* in movimento nella quale il comportamento e la descrizione dei sistemi meccanici non cambia rispetto a quelli osservati da uno sperimentatore sulla terra.

Questo esempio sarà riportato da **Galileo Galilei** –senza la dovuta citazione di Bruno!– nei *'Dialogo sopra i massimi sistemi'* (1624 -1630), nella Giornata seconda, dove ora la nave è diventata un *'Gran Navilio'.*

C'è da dire, a giustificazione di Galileo, che in quegli anni non era *salutare* citare Giordano Bruno, arso vivo a Roma in piazza Campo de' Fiori il 17 febbraio 1600, sotto il pontificato di Clemente VIII.

Isaac Newton nasce nell'anno 1642 (il 25 dicembre!), anno in cui Galileo muore.

La Relatività di Bruno & Galileo viene fatta propria ed elegantemente ricucita da Newton nei

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica del 1687.

Newton, benché (ovviamente) di fede eliocentrica, non ha dubbi:
crede fortemente nella cosmologia antica, nella volta celeste e nelle stelle fisse, la cui rimozione sarà realizzata da un grande sostenitore di Newton: Halley. Questo si rivelerà un bias per la meccanica classica appena sistematizzata.

Secondo Newton: il sistema planetario è al centro dell'universo.

Newton ci consegna un capolavoro: la meccanica classica.
La sua costruzione degli Spazi e Riferimenti Inerziali risente di questa assolutezza e centralità.

Riguarderemo nel seguito, in una modalità *sintetica e geometrica*, la presentazione degli Spazi e Riferimenti Inerziali e di alcuni elementi della meccanica classica.

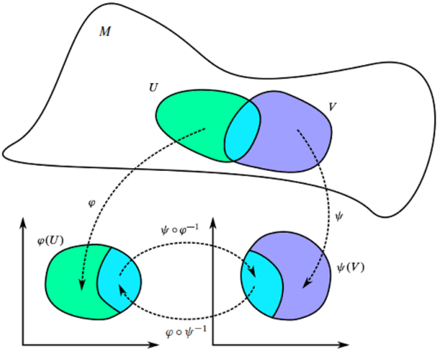
Verso una geometria dei Riferimenti Inerziali

Come dobbiamo intendere questi spazi inerziali, i **riferimenti inerziali**?

Che modello matematico, semplice e rigoroso, possiamo assumere per essi?

La *geometria differenziale* ci offre una “marcia in più” per capire meglio:

Pensiamo, per un momento, alle **varietà differenziali** M, dim $M = n$,
alle loro **carte locali** $\varphi : M \to \mathbb{R}^n, \quad \psi : M \to \mathbb{R}^n$,
alle **mappe di transizione** tra loro, $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,



Verso una geometria dei Riferimenti Inerziali

Appare consolidata l'idea (Arnol'd, altri) che un modello algebrico per lo spazio-tempo classico (anche in relatività ristretta), sia fornito da una composizione di **spazi affini**:
(Terna: *insieme, spazio vettoriale, operazione*)

$$M = \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_1$$

$\mathbb{A}_3$: insieme sp. affine dei 'punti dello spazio',
$\mathbb{A}_1$: insieme sp. affine degli 'istanti'.

• Notiamo che $\mathbb{A}_3$ codifica automaticamente, intrinsecamente, il **trasporto parallelo**, di vettori lungo curve ecc.

La nostra **varietà differenziale**: $M = \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_1$, spazio-tempo classico

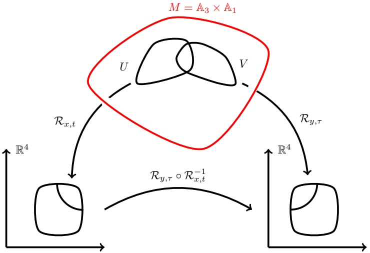
Le **carte locali** φ, ψ, sono ora i **Riferimenti Inerziali**:

$$\mathcal{R}_{x,t} : M \to \mathbb{R}^4 \qquad \mathcal{R}_{y,\tau} : M \to \mathbb{R}^4$$

Le **mappe di transizione** $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sono *lineari*, e sono esattamente le **trasformazioni di Galilei**.

Per fissato ad arbitrio un vettore velocità $V \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{R}_{y,\tau} \circ \mathcal{R}_{x,t}^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad (x,t) \mapsto (y,\tau) \ : \quad \begin{cases} y &= x - V\,t \\ \tau &= t \end{cases}$$



ATTENZIONE!

• Le **mappe di transizione (le tr. di Galilei)** sono *tra spazi vettoriali reali*, $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, quindi matematicamente controllabili, calcolabili, lì il calculus funziona, ecc...

• Ma la definizione, l'introduzione, delle **Carte, dei Riferimenti Inerziali**, $\mathcal{R}_{x,t} : M \to \mathbb{R}^4$, ha un contenuto *extra-matematico*, coinvolge M, un oggetto 'reale', che vogliamo modellizzare, un insieme astratto senza una (nota) topologia a priori.

• E' noto che l'assegnazione di un atlante di carte dota M di struttura topologica.

• E poi, infine, cosa significa quell'aggettivo "INERZIALE" ?

Proprio qui, interviene **Isaac Newton:**

1] La **Definizione di Riferimento Inerziale**: $\mathcal{R}_{x,t}$ è tale se una particella isolata, 'lontana infinitamente da ogni altra', in esso descrive solo e soltanto moti rettilinei uniformi.

(*Possibilità fisica*: Ernst Mach, Paul Painlevé, Aldo Bressan & la logica modale)

2] La **Prima Legge** o assioma, della meccanica classica:
Esiste un Riferimento Inerziale.

Comprendiamo che da queste *Definizione e Prima Legge* discende che ogni altro Riferimento Inerziale è ottenuto per trasformazioni spazio-temporali *lineari* (o affini) dal primo.
L'ulteriore requisito richiesto di *Tempo Assoluto*,

$$\tau = t \qquad\qquad (o,\ se\ vogliamo,\ \tau = a\,t + b),$$

spinge necessariamente alle tr. di Galilei:
la struttura delle mappe di transizione $\mathcal{R}_{y,\tau} \circ \mathcal{R}_{x,t}^{-1}$ è così ben delineata.

Ma perché mai introdurre questi (privilegiati) Riferimenti Inerziali?

Ce lo dice ancora Newton: in essi, e solo in essi, per N particelle materiali,

3] la **Seconda Legge** della meccanica si scrive nella seguente forma, $i, j, k = 1, \ldots, N$ numero delle particelle del nostro universo:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \left(\ldots, x_j - x_k, \ldots, \frac{dx_j}{dt} - \frac{dx_k}{dt}, \ldots \right) \qquad (*)$$

Forma che rimane **invariata** in ogni altro sistema di Riferimento Inerziale:

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_i \left(\ldots, y_j - y_k, \ldots, \frac{dy_j}{dt} - \frac{dy_k}{dt}, \ldots \right) \qquad (**)$$

Prova (molto semplice):
se $t \mapsto x_i(t),\ i = 1, \ldots, N$, risolve $(*)$ in $\mathcal{R}_{x,t}$,
allora

$$t \mapsto y_i(t) := x_i(t) - V\, t$$

risolve $(**)$ in $\mathcal{R}_{y,\tau}$, infatti:

$$\underbrace{y_j(t) - y_k(t) = x_j(t) - x_k(t)}, \quad \underbrace{\frac{dy_j}{dt}(t) - \frac{dy_k}{dt}(t) = \frac{dx_j}{dt}(t) - \frac{dx_k}{dt}(t)}, \quad \underbrace{\frac{d^2 y_i}{dt^2}(t) = \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t)}.$$

$\square$

In realtà, abbiamo un po' 'semplificato' nello scrivere le tr. di Galileo, cioè:

$$\begin{cases} y = x - V\,t\,, \\ \tau = t\,. \end{cases}$$

Più in generale, per $V, b \in \mathbb{R}^3,\ Q \in SO(3)$:

$$\begin{cases} y = Qx - V\,t + b\,, \\ \tau = t\,. \end{cases}$$

Per guadagnare l'invarianza dovremo chiedere alle funzioni-forza $F(u, v, \dots)$ la proprietà di **isotropia**:

$$QF(u, v, \dots) = F(Qu, Qv, \dots) \qquad \forall Q \in SO(3)$$

("Pr. di Indifferenza Materiale" vs "Invarianza Galileiana")

Notare che Q è proprio lo Jacobiano della parte spaziale della tr. di Galilei.

Tale richiesta d'**isotropia** sarà generalizzata con Ricci Curbastro, e poi assunta da Einstein, dalla **Covarianza Tensoriale**:

$$\frac{\partial y}{\partial x} F(u, v, \dots) = F\left(\frac{\partial y}{\partial x} u, \frac{\partial y}{\partial x} v, \dots\right)$$

Il Principio di Ernst Mach

Gli spazi inerziali ‘appena’ introdotti da **Newton**, sono minati ‘in culla’ –in realtà, due secoli dopo, nel 1883– da **Ernst Mach**[1] e definitivamente abbattuti da **Albert Einstein** nel 1915.

La rimozione definitiva dell’idea di ‘stelle fisse’ (Halley, nel ’700), condusse alla critica radicale del concetto di ‘spazio inerziale’ (Mach), sintetizzata da **Einstein** come **‘Principio di Mach’**:

È la distribuzione delle **masse del cosmo e il loro moto** *che induce nel nostro locale ambiente, alla periferia dell’universo,*
il ‘buon funzionamento’ della fisica (la meccanica)
e la sua descrizione invariante nei Sistemi Inerziali.

[1] E. Mach, La meccanica nel suo sviluppo storico-critico, Boringhieri.

Einstein chiamava **Principio di Mach** il seguente argomento:

Si ritiene che il carattere eccezionale degli spazi inerziali, che su scala 'antropocentrica' sentiamo centrali, ineludibili, fondamento assoluto della meccanica classica, sia in effetti una conseguenza meramente gravitazionale, dovuta alle distribuzioni delle stelle (e galassie) e ai loro effetti sul nostro locale spazio, ove si articola il nostro sistema planetario e altro.

Percy Williams Bridgman[2] rafforzerà il punto di vista di Mach chiamandolo

Ipotesi dell'immanenza dell'intero universo:

Non è possibile l'isolamento: il resto dell'universo, a qualunque distanza si trovi, ha sempre un effetto locale, almeno su taluni fenomeni.

Viene così resa effimera la definizione degli spazi inerziali, per la quale si deve supporre *poter* isolare una particella, *infinitamente lontana* dalle altre, e proporre per essa solo e soltanto moti rettilinei uniformi.

[2] P. W. Bridgman, La logica della fisica moderna, Boringhieri.

Ipparco, Tolomeo, Halley, Mach, Einstein

Una domanda -retorica!- potrebbe essere: quale sarebbe stato il disegno alternativo di Newton se fosse stato consapevole della vacuità delle ‘stelle fisse’?

C’è dunque un **filo rosso** che lega il vecchio progetto di Ipparco, via via fino a Tolomeo, e quindi a Halley. Halley dunque, Mach, e infine Einstein.

Cade la supponenza antropocentrica –sia pur ora eliocentrica– di una volta celeste immobile in cui noi, ‘sistema solare’, ne siamo i signori e padroni, al centro.

Ci accorgeremo che viviamo invece nella periferia di uno sterminato universo e il nostro ‘sentir inerziale’ è nient’altro che un effetto meramente gravitazionale. La gravità diventa con Einstein geometria:

le masse e il loro moto *curvano* lo spazio e il tempo.

Ma per tutto questo dovremo aspettare il **1914** (anzi, il ’15 e poi il ’16 per la versione definitiva).

Einstein, Relatività Ristretta del 1905:

- invarianza della velocità della luce (che è anche la massima consentita),
- le equazioni di Maxwell *non sono invarianti* per le tr. di Galilei,
- *crolla* la meccanica delle interazioni istantanee, $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i$.
- Una prima conseguenza è la caduta del tempo assoluto.

Il nostro universo spazio-temporale è **ancora** uno spazio affine, penseremo ora a

$$M = \mathbb{A}_4$$

e **ancora** si ripristinano i Riferimenti Inerziali,

$$\mathcal{R}_{y,\tau} : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{R}^4 \,, \qquad \mathcal{R}_{x,t} : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{R}^4$$

Ciò che cambia sono esattamente le *mappe di transizione*: saranno ancora *lineari*, ma ora del tipo (trasformazioni di *Lorentz*, qui, quella che coinvolge il *primo* asse):

$$\mathcal{R}_{y,\tau} \circ \mathcal{R}_{x,t}^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad (x,t) \mapsto (y,\tau) \quad (\mathit{Lorentz}) \ : \left\{ \begin{array}{ccl} y_1 & = & (x_1 - V\,t)/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \\ y_2 & = & x_2 \\ y_3 & = & x_3 \\ \tau & = & (t - \frac{V}{c^2} x_1)/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{array} \right.$$

$$x = (x^\alpha)\Big|_{\alpha=0,1,2,3} = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$$

Ad esser precisi, l'idea organica di spazio-tempo relativistico $M = \mathbb{A}_4$ arriva solo nel 1908 con Hermann Minkowski.
Pe due eventi spazio-temporali **collegati da un raggio di luce**,

$$x^0_{(1)} = ct_{(1)}, x^1_{(1)}, x^2_{(1)}, x^3_{(1)} \qquad x^0_{(2)} = ct_{(2)}, x^1_{(2)}, x^2_{(2)}, x^3_{(2)}$$

si avrà

$$c^2(t_{(2)} - t_{(1)})^2 = (x^1_{(2)} - x^1_{(1)})^2 + (x^2_{(2)} - x^2_{(1)})^2 + (x^3_{(2)} - x^3_{(1)})^2 \qquad (\star)$$

Introdotta la matrice (f.qu. iperbolica):

$$g = \left(g_{\alpha\beta}\right)\Big|_{\alpha,\beta=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicando semplicemente con $x := x_{(2)} - x_{(1)}$, la $(\star)$ si riscrive:

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0 \qquad \text{cioè:} \qquad x^T g\, x = 0 \qquad (*)$$

$$x^T g\, x = 0 \qquad (*)$$

In ogni altro Riferimento Inerziale, dove trasformiamo x in y con una 'adeguata' trasformazione Λ,

$$y = \Lambda x \ ,$$

$$x^0 = ct, x^1, x^2, x^3 \qquad \longrightarrow \qquad y^0 = c\bar{t}, y^1, y^2, y^3$$

si dovrà **ancora** avere (per la costanza della velocità della luce, c):

$$-(y^0)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 0 \qquad \text{cioè:} \qquad y^T g\, y = 0 \qquad (**)$$

$$(\Lambda x)^T g (\Lambda x) = x^T (\underbrace{\Lambda^T g \Lambda}_{=g\,?}) x = 0$$

Quanto sopra scritto tra $(*)$ e $(**)$ rende plausibile (ma è un teorema da dimostrare!) che la caratterizzazione delle trasformazioni di Lorentz sia esattamente data dalle *isometrie* di g:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \qquad \text{(gruppo omogeneo di Lorentz)}$$

Insomma, g è la **metrica pseudo-euclidea dello spazio-tempo** di Minkowski.

1905: Le equ. di Maxwell sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz Λ!

Cosa ha in mano, cosa c'è nella mente Einstein?

• la caduta definitiva degli Spazi/Riferimenti Inerziali (Mach, ecc.),

• tale caduta è dovuta a effetti gravitazionali,

• Einstein avverte che gli effetti classici delle *forze inerziali o apparenti* sono essi stessi di natura gravitazionale: l' **'esperimento mentale' dell'ascensore** in caduta libera: il riferimento non-inerziale della cabina cancella/compensa la forza di gravità.

• A questo punto ogni *altro* sistema di Riferimento appare aver pari dignità fisica. La 'nuova fisica' dovrà essere invariante rispetto ad una straordinaria più vasta classe di trasformazioni, $y = y(x)$, dove, quanto meno, potremmo richiedere che il tempo si comporti sensatamente, chiedendo: $\frac{\partial y^0}{\partial x^0} > 0$.

• Rimanendo per un momento ancora in descrizione classica con la gravità Newtoniana, si avverte che la *massa inerziale* è esattamente la *massa gravitazionale*: $m_{(inerz.)} \equiv m_{(grav.)}$, **Principio di Equivalenza**,

$$m_{(inerz.)} \frac{d^2 OP}{dt^2} = m_{(grav.)} M_{(grav.)} \gamma \,\text{vers}\, PS/|PS|^2$$

e l'**unico altro esempio di forze per unità di massa** sono proprio le *forze apparenti*.

• Ancora, dobbiamo pensare ad una nuova teoria, *di campo (PDE)*, abbandonare, come già proposto dalla relatività ristretta, la descrizione delle teorie *(ODE) di interazione istantanea.*

• Ma quale legame (PDE) estraiamo dalla gravitazione Newtoniana?

L'energia potenziale gravitazionale U è correlata alle sorgenti, cioè alla **densità di massa** ρ nello spazio, mediante l'equazione di Poisson:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\, \rho$$

dove $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ è l'operatore spaziale del *secondo ordine*, il Laplaciano.

• • Il colpo magistrale di Einstein fu nell'individuare,
quale nuovo soggetto matematico surrogante l'energia gravitazionale U,
una nuova metrica iperbolica pseudo-Riemanniana $g_{\alpha\beta}(x)$, *deformazione* della pseudo-metrica iperbolica di Minkowski.

L'operatore del *secondo ordine, 'a la Poisson'*, di questo nuovo soggetto, nato ancestralmente da Gauss, avrebbe necessariamente avuto a che fare con la *curvatura...*

• • Quasi (p.e. $\frac{\partial y^0}{\partial x^0} > 0$) ogni sistema di coordinate è 'lecito', ammissibile.

La teoria doveva infine essere 'tensoriale', esattamente sul modello del calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita!

Grazie per l'attenzione!