DIPARTIMENTO MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Associazione Patavina Mathesis

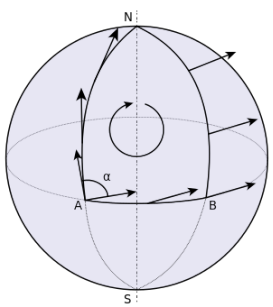
Mathesis Venezia

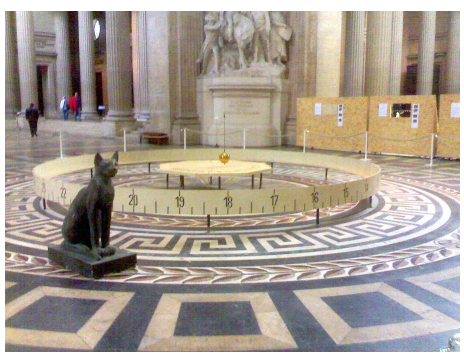
5 dicembre 2025

Aula 2AB45 ore 15:30 - Torre Archimede via Trieste 63 Padova

Il Trasporto Parallelo di Levi-Civita e la Precessione del pendolo di Foucault

Franco Cardin





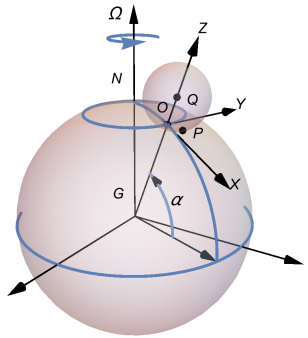
Il 21 Novembre 2016 il Dipartimento di Matematica è stato intitolato al matematico Tullio Levi-Civita (Padova, 29 marzo 1873 – Roma, 29 dicembre 1941). Tullio Levi-Civita, che fu studente e (1897-1919) professore presso il nostro Ateneo, è un nome di cui i matematici padovani sono fieri, come lo sono per quello di Galileo Galilei. Nella primavera del 1915, a pochi mesi dalla pubblicazione della Relatività Generale, Levi-Civita si accorse di un errore che ne avrebbe minato la validità e scrisse ad Einstein per segnalarglielo. Einstein, dopo una iniziale riluttanza, riconobbe la correttezza delle obiezioni del padovano, a cui rimase grato per tutta la vita ("spaghetti and Levi-Civita" fu la risposta data da Einstein a un cronista che gli chiedeva cosa amasse di più dell'Italia). Levi-Civita si occupò di molti altri argomenti: la teoria del Trasporto Parallelo, che porta il suo nome, risulterà l'elemento fondante della moderna teoria delle Connessioni; oltre alla geometria della Relatività Generale, si occupò dalla stabilità delle orbite dei pianeti fino alla matematica dei cavi intercontinentali del telegrafo.

Le leggi di "difesa della razza" del 1938 lo allontanarono definitivamente dall'università e da tutte le istituzioni scientifiche italiane, mentre nel mondo libero se ne celebrava la grandezza.

La natura tesse i suoi motivi con il lo più lungo,
perciò ogni minimo frammento di sto a rivela la struttura dell'intero arazzo.

Richard Feynman

TULLIO LEVI-CIVITA
nasce a Padova il 29 marzo del 1873, in via Daniele Manin, 7.
In seguito, e no alla ne del 1918, abita in via Altinate, 14.



$$\omega^2 := \frac{g}{\ell}\ , \qquad \Omega_z := \underline{\Omega}\cdot\hat{Z} = |\underline{\Omega}|\sin\alpha$$

Equazioni del sistema linearizzato:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega^2 x + 2m\Omega_z\dot{y} \\ m\ddot{y} = -m\omega^2 y - 2m\Omega_z\dot{x} \end{cases}$$

$$\zeta := x+iy \in \mathbb{C}\sim\mathbb{R}^2, \quad \ddot{\zeta}+2i\Omega_z\dot{\zeta}+\omega^2\zeta = 0, \quad \zeta = e^{\lambda t}, \quad \lambda^2+2i\Omega_z\lambda+\omega^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -i\Omega_z \pm i\sqrt{\Omega_z^2+\omega^2}$$

$$\zeta(t,c_1,c_2) = \underbrace{e^{-i\Omega_z t}}_{\text{precessione dei p.ti apsidali}} \underbrace{(c_1 e^{i\sqrt{{\Omega_z}^2+\omega^2}t} + c_2 e^{-i\sqrt{{\Omega_z}^2+\omega^2}t})}_{\text{ellisse sul piano } \mathbb{C}\sim\{OXY\}}$$

$$e^{i\vartheta}, \quad \vartheta = -\Omega_z t\,, \qquad \frac{2\pi}{24 \text{ ore}} = |\underline{\Omega}|, \quad T = 24 \text{ ore} = \frac{2\pi}{|\underline{\Omega}|} \ : \text{ periodo diurno}$$

per $t = T$: $\underbrace{\vartheta = -\Omega_z T}_{<0,\ \text{in senso orario nell'emisf. sett.}} = -\cancel{|\underline{\Omega}|}\sin\alpha\cdot\frac{2\pi}{\cancel{|\underline{\Omega}|}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vartheta = -2\pi\sin\alpha}$

La non evidente **natura puramente geometrica** di questo fenomeno fu intuita da Foucault e rimarcata da **Louis Poinsot** (1777-1859) [1], esattamente nel dibattito scientifico seguito alla collocazione del pendolo nell'Osservatorio Astronomico e successivamente nel Pantheon.

In una memorabile discussione sul pendolo con Foucault e Binet all'Acadèmie des Sciences, Parigi, 17 février 1851,

Poinsot osservò:

> *"Ce mouvement, dis-je, est un phénomène purement géométrique, et dont l'explication doit être donnée par la simple géométrie, comme l'a fait M. Foucault, et non par des principes de dynamique, qui il n'y entrent pour rien".*
>
> *"Questo movimento, dico, è un fenomeno puramente geometrico, e la cui spiegazione deve essere data dalla geometria semplice, come fece Foucault, e non da principi di dinamica, che non hanno alcuna parte in esso".*

[1] **Giancarlo Benettin con pazienza e passione ha ritrovato questo fatto storico su Poinsot, leggendo con cura l'antica letteratura.**

Il nostro obiettivo:
Mostrare che questa precessione corrisponde
all'angolo $\boldsymbol{\vartheta}$ (di *olonomia*, questo è il nome)
associato al

trasporto parallelo di un generico vettore iniziale $\boldsymbol{V(0)}$,

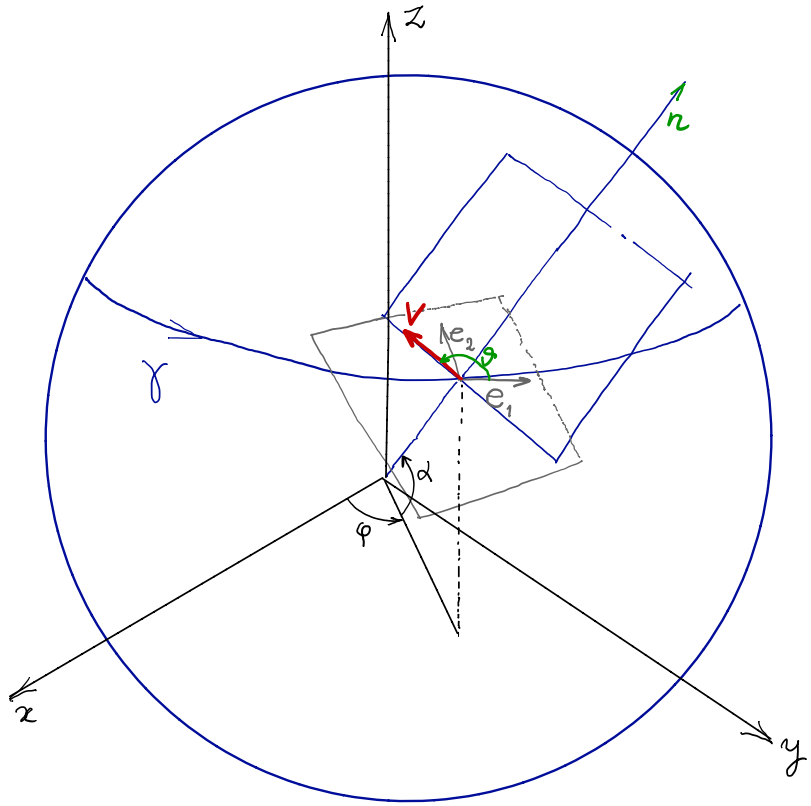
lungo l'**intero parallelo γ,**

situato alla latitudine α :

$$\boldsymbol{\vartheta = \widehat{V(0), V(2\pi)}}$$

Questo vettore trasportato V si manterrà tangente alla sfera, percorrendo il parallelo terrestre γ.

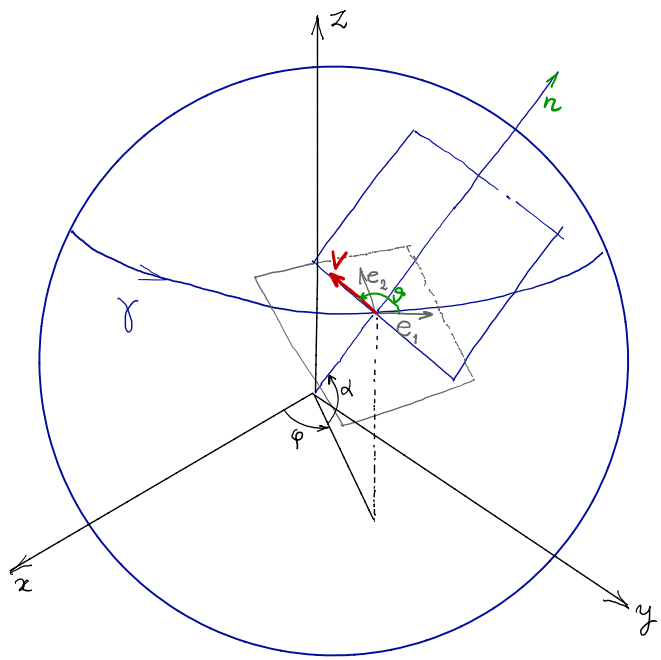
Interpretazione: dobbiamo pensare a V come appartenente, individuante, il "piano di oscillazione" e quindi rappresentante infine il suo moto di precessione.



Consideriamo una sfera di raggio **unitario** S^2 –la Terra– e la curva chiusa γ, il **parallelo** alla fissata *latitudine* α. La *longitudine* è denotata da φ,

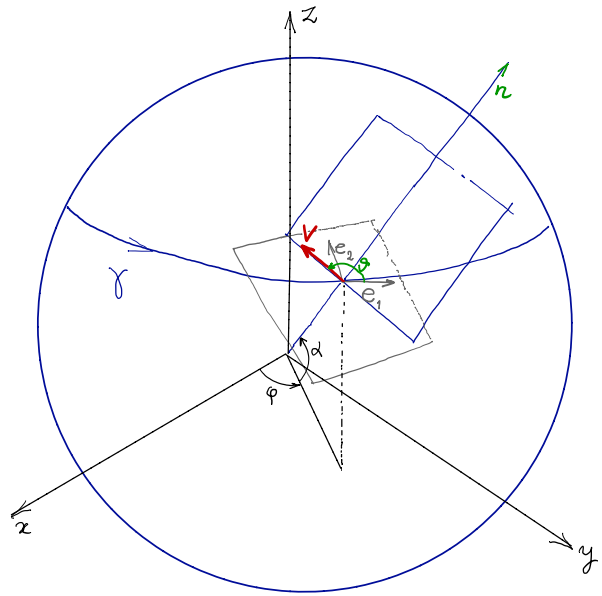
$$[0, T = 24 \text{ ore}] \ni t \mapsto \underbrace{\gamma(t) = n(t)}_{!!} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\varphi(t) \\ \cos\alpha\sin\varphi(t) \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \gamma(T)\,.$$

Consideriamo la **terna mobile** (e_1, e_2, n), evolvente lungo $\gamma(t)$,
e_1 è tangente a γ, come lo è $\dot{n}$,
(e_1, e_2) è una base per $T_P S^2$.



La terna mobile (e_1, e_2, n) su $T_{\gamma(t)}S^2$:

$$[0,T] \ni t \mapsto \gamma(t) = n(t) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\varphi(t) \\ \cos\alpha\sin\varphi(t) \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = \gamma(T)\,.$$



$$\dot n = \cos\alpha(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\dot\varphi$$

nel conto che segue
$\varphi(t)$ può esser preso *arbitrario*,
cioè differente dalla rotazione
staz. terrestre $\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{2\pi}{T}t$,
solamente serve: $\varphi(T) - \varphi(0) = 2\pi$

$$\begin{array}{rcl} e_1 &=& (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\ e_2 &=& (-\sin\alpha\cos\varphi, -\sin\alpha\sin\varphi, \cos\alpha) \\ n &=& \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \dot e_1 &=& (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\dot\varphi \\ \dot e_2 &=& -\sin\alpha\,\dot\varphi\, e_1 \\ \dot n &=& \cos\alpha\,\dot\varphi\; e_1 \end{array}$$

Ora, mettiamo in evidenza la struttura di $\dot e_1$ sul piano (e_2, n)
(ovviamente, $e_1 \cdot \dot e_1 = 0$).

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\
e_2 &= (-\sin\alpha\cos\varphi, -\sin\alpha\sin\varphi, \cos\alpha) \\
n &= (\cos\alpha\cos\varphi, \cos\alpha\sin\varphi, \sin\alpha) = \gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\dot{\varphi}\,, \\
&= \Big(-\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1}\cos\varphi, -\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1}\sin\varphi, \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}_{0}\Big)\varphi\,, \\
&= \sin\alpha\,\underbrace{(-\sin\alpha\cos\varphi, -\sin\alpha\sin\varphi, \cos\alpha)}_{e_2}\dot{\varphi} - \cos\alpha\,\underbrace{(\cos\alpha\cos\varphi, \cos\alpha\sin\varphi, \sin\alpha)}_{n}\dot{\varphi}\,, \\
&= \sin\alpha\,\dot{\varphi}\,e_2 - \cos\alpha\,\dot{\varphi}\,n\,.
\end{aligned}
$$

Attenzione: c'è il nuovo angolo θ !
θ è tra il vettore V e il versore tangente e_1 di γ .

Considereremo la nostra **Legge del Trasporto Parallelo :**

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -(\boldsymbol{V} \cdot \dot{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{n}$$

quindi $V \cdot \dot{V} = 0$ e prendiamo $|V_0| = |V| \equiv 1$.
Rem: $\dot{e}_1 = \sin\alpha\,\dot{\varphi}\,e_2 - \cos\alpha\,\dot{\varphi}\,n$, $\dot{e}_2 = -\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,e_1$

$$\begin{aligned} V &= \cos\theta\, e_1 + \sin\theta e_2\,, \\ \dot{V} &= -\sin\theta\,\dot{\theta}e_1 + \cos\theta\,\underbrace{\dot{e}_1}\, + \cos\theta\,\dot{\theta}e_2 + \sin\theta\,\underbrace{\dot{e}_2}\,, \\ &= -\sin\theta\,\dot{\theta}e_1 + \cos\theta(\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,e_2 - \cos\alpha\,\dot{\varphi}\,n) + \cos\theta\,\dot{\theta}e_2 - \sin\theta\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,e_1 \\ &= -(\dot{\theta} + \sin\alpha\dot{\varphi})\sin\theta e_1 + (\dot{\theta} + \sin\alpha\dot{\varphi})\cos\theta e_2 - \cos\theta\cos\alpha\dot{\varphi}\,n\,. \end{aligned}$$

Stiamo imponendo che V si propaghi secondo $\dot{V} = -(V \cdot \dot{n})n$,
dobbiamo avere:

$$\dot{\theta} + \sin\alpha\,\dot{\varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{V} = \underbrace{-(V \cdot \dot{n})}_{-(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta e_2)\cdot(\cos\alpha\,\dot{\varphi}\ e_1)} \qquad n = -\cos\theta\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,n\,.$$

Cosa ci sta dicendo

$$\dot{\theta} + \sin\alpha\,\dot{\varphi} = 0 \quad ?$$

Prendendo $\theta(0) = 0$ e ricordando che $\varphi(T) - \varphi(0) = 2\pi$,

$$0 = \int_0^T \dot{\theta}(t)\,dt + \int_0^T \sin\alpha\,\dot{\varphi}(t)\,dt, \qquad 0 = \theta(T) + \sin\alpha\,\underbrace{(\varphi(T) - \varphi(0))}_{2\pi}$$

Otteniamo l'angolo di Foucault atteso (vedi slide 35):

$$\theta(T) = -2\pi\sin\alpha = \boldsymbol{\vartheta}$$

• Questo calcolo è stato proposto, con modalità diverse, da **John Oprea** nel **1995**.

• Il ruolo del trasporto parallelo, in un contesto di approssimazione *adiabatica*, risultò evidente fin dal 1918, poco dopo la pubblicazione di Levi-Civita (1917), per **Johann Karl August Radon** (1887-1956).

Come sottolineato in Arnol'd-Kozlov-Neishtadt [2], purtroppo non vi è traccia del suo lavoro in letteratura,
il contributo di Radon fu riportato da Felix Klein (1849-1925) in:
Dritter Hauptteil II, *J. Radons mechanische Herleitung des Parallelismus von T. Levi-Civita* del suo volume[3] di opere del 1926.

[2] Sec. 6.4.3 di **Arnol'd V. I., Kozlov V. V. and Neishtadt A. I.**, Mathematical aspects of classical and celestial mechanics.**Third edition**. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 3, Springer-Verlag, xiv+518 pp., Berlin, **2006**.

[3] **Felix Klein (1849-1925)**, Vorlesungen über höhere Geometrie. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 22, Verlag von Julius Springer, viii+405 pp., Berlin, **1926**.

Un'approssimata traduzione dal tedesco di Klein, 1926:

Di seguito, si tenterà di derivare il trasporto parallelo da un'ovvia considerazione meccanica. Questa idea trae origine da J. Radon ed è pubblicata qui per la prima volta.
La rotazione del piano di oscillazione del pendolo di Foucault è stata utilizzata ripetutamente per chiarire le condizioni in questione. Viceversa, vogliamo partire da un problema meccanico equivalente che dovrebbe condurci al trasporto parallelo.
Queste idee coinvolgono naturalmente superfici dello spazio euclideo tridimensionale; infine, si mostrerà come considerazioni corrispondenti possano essere applicate anche alla geometria "interna" di una varietà Riemanniana generale (inizialmente bidimensionale).
Se, nell'esperimento di Foucault, immaginiamo la Terra ferma, ma al suo posto un osservatore con un pendolo che si muove lungo una circonferenza parallela, allora entra in gioco la rotazione della direzione di oscillazione, nota dalla meccanica.
Se l'osservatore usa questa direzione per orientarsi invece di una bussola, potrà anche dire di considerarla spostata parallelamente da un punto all'altro. Noterà quindi, dopo una rivoluzione completa, che la direzione è cambiata rispetto all'ambiente circostante "di casa" e, se possiede sufficienti conoscenze di geometria e meccanica, concluderà che la superficie terrestre non può essere piana.

Arnol'd V. I., Kozlov V. V. and Neishtadt A. I.:
In Riemannian geometry (and therefore also in general relativity theory) a fundamental role is played by the Levi-Civita connection (the definition of which is rather difficult), which defines parallel transport of vectors along a manifold with a Riemannian metric. Radon noted in 1918 that the most physically natural definition of this (quite non-obvious) transport is provided by the theory of adiabatic invariants. Namely, let us place at a point of the manifold some oscillatory system, for example, let us suspend a Foucault pendulum over this point, or consider in the tangent space at this point a Hooke elastic system with potential energy proportional to the square of the distance from the original point. Under appropriate initial conditions the system will perform an eigen-oscillation in the direction defined by some (any) vector of the tangent space. We now slowly and smoothly transport our oscillatory system along some path on our manifold. It follows from adiabatic theory that the oscillation will remain (in the adiabatic approximation) an eigen-oscillation. Its direction (polarization) will rotate somehow during the motion of the point along the path. It is this rotation (which proves to be an orthogonal transformation of the initial tangent space into the terminal one) which is the Levi-Civita parallel transport (or connection). It is interesting that Radon's theory was not understood by geometers (because they were not familiar with adiabatic invariants) and therefore was unfairly forgotten.

ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus. Mathéma

Research article / *Article de recherche*

A historical perspective on parallel transport: isometric immersions and Foucault precession

Franco Cardin [a] **and Rossana Tazzioli** [b]

[a] Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università di Padova, Italia

[b] Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, France

E-mails: cardin@math.unipd.it (F. Cardin), rossana.tazzioli@univ-lille.fr (R. Tazzioli)

Grazie per l'attenzione (e la pazienza!)