

MATHESIS DI PADOVA

**SCACCHIERE EGUALITARIE  
E  
MATRICI DI HADAMARD**

Luigi Salce

Padova, 7 Febbraio 2020

seguendo il lavoro apparso su

Images de Mathématiques

del 22 Settembre 2012

## *La Conjecture de Hadamard*

di Shalom Eliahou

Professore all'Università di Calais

*con un grazie a Benedetto Scimemi pe la segnalazione*

Come nell'articolo di Shalom Eliahou, seguirò lo sviluppo cronologico delle scoperte sulle matrici di Hadamard tra il 1867 ed il 1933, prima dell'avvento dei computer, che ha tra i principali protagonisti



1

2

3

4

5

**1. James Joseph SYLVESTER (1814-1897)**

**2. Jacques Salomon HADAMARD (1865 – 1963)**

**3. Umberto SCARPIS (Padova 1861- Bologna 1921)**

**4. Ray Edwin GILMAN (1887-1975)**

**5. Raymond Edward Alan Christopher PALEY (1907-1933)**

## 1. Scacchiere egualitarie (o anallagmatiche)

Nel 1867 il cinquatreenne James Joseph Sylvester era professore presso l'Università di Woolwich, un sobborgo di Londra, già da dodici anni; mancavano ancora dieci anni alla sua chiamata presso la John Hopkins University di Baltimora. Orbene, Sylvester in quell'anno pubblicò su "*Philosophical Magazine*", n. 34, l'articolo:

*"Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colors, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers"*

che possiamo tradurre in

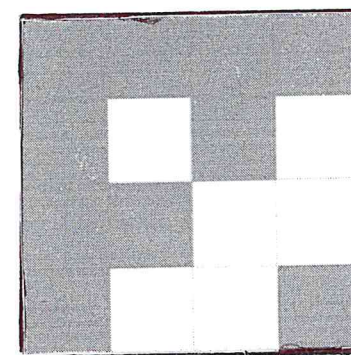
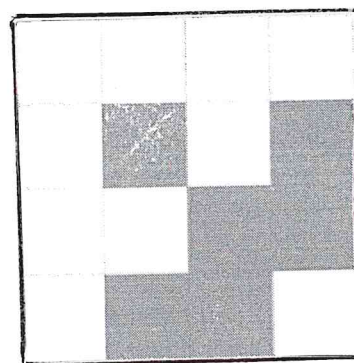
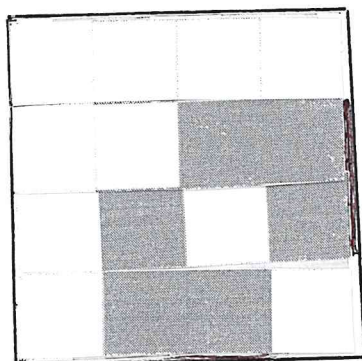
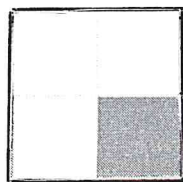
*"Riflessioni sulle matrici ortogonali inverse, sulle successioni simultanee di segni, sui pavimenti a mosaico di due o più colori, con applicazioni alla regola di Newton, alle piastrellature ornamentali ed alla teoria dei numeri."*



In questo lavoro Sylvester chiama *scacchiera anallagmatica* (dal greco  $\alpha\nu\text{-}\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\mu\alpha$  = senza-cambiamento) una scacchiera  $n \times n$  a caselle di due colori, diciamo bianco e nero, che gode delle proprietà:

*(EG) prese due qualunque righe, le coppie di caselle corrispondenti che hanno lo stesso colore sono tante quante le coppie di caselle corrispondenti che hanno colore opposto.*

Noi, come Shalom Eliahou, l'autore dell'articolo che seguiamo, preferiamo chiamarle "*scacchiere egualitarie*", da cui la notazione (EG) per la proprietà che le definisce. Se  $n = 2$  abbiamo otto diverse scacchiere egualitarie. Ecco qui una scacchiera egualitaria  $2 \times 2$  e tre scacchiere egualitarie  $4 \times 4$ .



Si vede che la seconda e la terza scacchiera 4x4 si ottengono dalla prima tramite una di queste operazioni:

- (I) permutazione delle righe o delle colonne
- (II) inversione dei due colori in una riga o in una colonna.

Partendo da una scacchiera egualitaria di dimensioni arbitrarie ed effettuando una o più di queste operazioni si ottiene ancora una scacchiera egualitaria, come proveremo tra poco in modo algebrico. Forse da ciò deriva il nome di “*scacchiera senza cambiamenti*” datole da Sylvester.

Sylvester, a partire dalla prima scacchiera 2x2 vista sopra, costruisce scacchiere egualitarie che hanno per dimensione una qualunque potenza di 2. Il suo metodo è questo: data una scacchiera egualitaria  $n \times n$   $A$ , considera la scacchiera  $2n \times 2n$ :

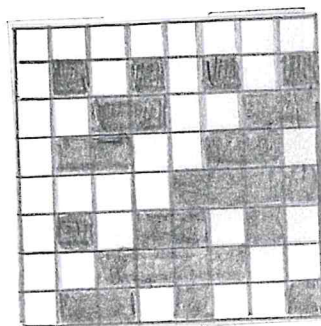
$$B = \begin{bmatrix} A & A \\ A & -A \end{bmatrix}$$

dove  $-A$  denota la scacchiera ottenuta da  $A$  invertendo i colori delle caselle. La seconda scacchiera 4x4 vista prima è ottenuta con questo metodo dalla scacchiera 2x2 data dal blocco in alto a sinistra.

Si può verificare direttamente che anche la scacchiera B gode dalla proprietà (EG); noi lo faremo tra poco in modo algebrico. Se A è simmetrica, tale è anche B.

Quindi Sylvester ha dimostrato l'esistenza di scacchiere egualitarie (simmetriche) di ordine 2, 4, 8, 16, 32, ...,  $2^n$ , ... .

Ecco la scacchiera egualitaria di ordine 8 ottenuta col metodo di Sylvester.



Naturalmente sorge il seguente problema:

**per quali interi positivi  $n$  esistono scacchiere egualitarie di ordine  $n$ ?**

Una prima risposta si ha con la seguente

**PROPOSIZIONE.** *Se esiste una scacchiera egualitaria di ordine  $n \geq 3$ , allora  $n$  è un multiplo di 4.*

Dim. Sia  $A$  una matrice ugualitaria  $n \times n$ , con  $n \geq 3$ . Useremo le proprietà (I) e (II) viste sopra.

Cominciamo invertendo i colori nelle colonne che hanno la prima casella in alto di colore nero. Col che otteniamo una scacchiera egualitaria che ha la prima riga tutta bianca. Permutiamo poi le colonne in modo che la seconda riga abbia le prime caselle bianche, seguite da quelle nere. Ciò ovviamente non modifica la prima riga bianca. La proprietà (EG) impone che le caselle bianche e quelle nere della seconda riga, confrontata con la prima, siano in pari numero; col che intanto  $n$  è un numero pari:  $n = 2m$ .

Andiamo ora alla terza riga. Permutiamo le prime  $m$  colonne in modo da avere nella terza riga prima le colonne bianche, siano esse in numero di  $B$ , e poi le colonne nere, siano esse in numero di  $N$ . Analogamente, permutiamo le ultime  $m$  colonne in modo da avere nella terza riga prima le colonne bianche, siano esse in numero di  $B'$ , e poi le colonne nere, siano esse in numero di  $N'$ .



La proprietà (EG) applicata prima a 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> riga e poi a 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> riga produce:

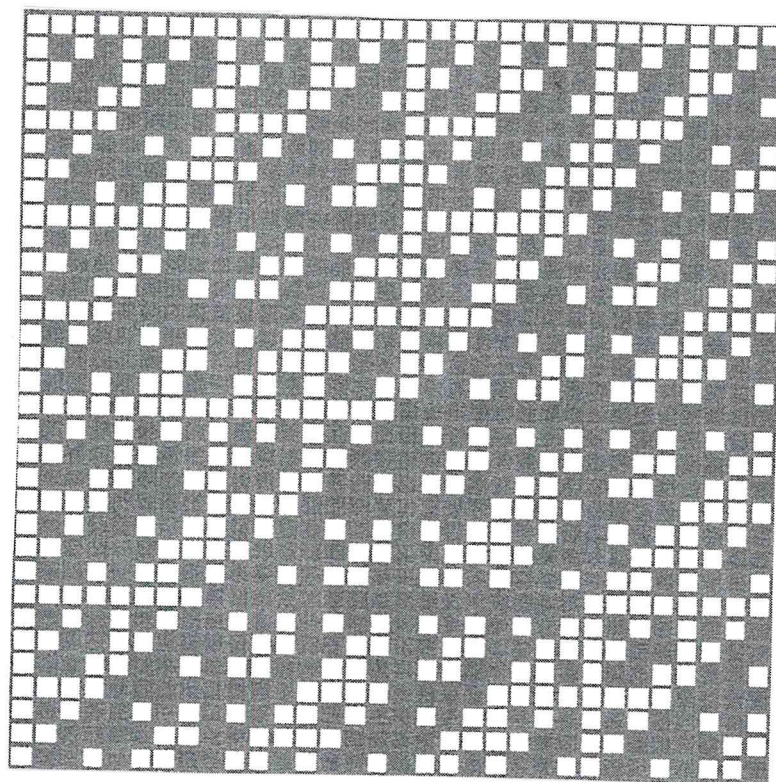
$$B + B' = N + N' , B + N' = N + B' .$$

Sottraendo membro a membro si ricava:

$$B' - N' = N' - B' \Rightarrow B' = N' \quad \text{e} \quad B - N = N - B \Rightarrow B = N .$$

Ricordando che  $B + N = m = B' + N'$ , si ricava  $B = N = B' = N' = n/4$ . #

Prima di passare dalle scacchiere alle matrici, esibiamo la scacchiera di ordine 32 ottenuta col metodo di Sylvester, ricordando che ha avuto un ruolo centrale nelle trasmissioni di immagini inviate da Marte nel 1972 dalla sonda Mariner 9, e poi nelle missioni fino al 1976, venendo utilizzata nel codice correttore d'errori che prende il nome di “*codice Walsh-Hadamard*”.



## 2. Dalle scacchiere alle matrici

Il passaggio di interpretare le scacchiere egualitarie come matrici consente di verificarne facilmente alcune proprietà, ed ha permesso nel tempo costruzioni algebriche raffinate per ottenerne di diversi ordini.

Tutto parte dal seguente problema che il ventottenne Hadamard si pose nel 1893, un anno dopo essersi laureato e tre anni prima di provare il *Teorema dei numeri primi* in contemporanea a de la Valle-Poussin:

*trovare matrici quadrate a coefficienti complessi di modulo  $\leq 1$   
che hanno modulo del determinante massimo.*

Il problema venne affrontato da Hadamard in questi due lavori:

«*Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant*», C. R. Acad. Sci. Paris, 116 (1893), 1500-1501.

«*Résolution d'une question relative aux déterminants*», Bull. Sciences Math. 17 (1893), 240-246.

Il problema nasceva in modo naturale, avendo Hadamard dimostrato in quei lavori le sue ben note disuguaglianze per i determinanti:

(1) se  $A = [a_{ij}]$  è una matrice complessa semi-definita positiva  $n \times n$ , allora

$$\text{Det}(A) \leq \prod_{i \leq n} a_{ii}.$$

(2) se  $B = [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2 \ \dots \ \underline{b}_n]$  è una qualunque matrice complessa quadrata, allora

$$|\text{Det}(B)| \leq \prod_{i \leq n} \|\underline{b}_i\|.$$

La dimostrazione della disuguaglianza in (1) si può ricavare per induzione su  $n$  applicando la formula del determinante in forma bordata, e quella in (2) applicando (1) alla matrice  $A = B^H B$  ( $B^H$  è la matrice trasposta coniugata di  $B$ ).

Ora, per passare dalle scacchiere alle matrici, bisogna attribuire valore numerico alle caselle bianche e nere. Le due opzioni più naturali sono:

$$\text{casella bianca} = 0, \text{ casella nera} = 1 \quad / \quad \text{casella bianca} = 1, \text{ casella nera} = -1.$$

L'opzione che funziona è la seconda; vediamo perché.



**PROPOSIZIONE.** *Una matrice  $n \times n$   $H$  a coefficienti in  $\{1, -1\}$  rappresenta una scacchiera egualitaria se e solo se  $H \cdot H^T = nI_n$ .*

Dim. Il prodotto tra matrici è quello usuale righe per colonne. Poiché i coefficienti sono 1 e -1, e quindi il prodotto vettoriale di ogni riga con se stessa è pari ad  $n$ , dire che  $H \cdot H^T = nI_n$  equivale a dire che il prodotto vettoriale tra due righe distinte è nullo, cioè che il numero di coppie di ugual segno coincide col numero di coppie di segno opposto, ovvero che vale la proprietà (EG). #

Una matrice soddisfacente alle ipotesi della proposizione precedente si chiama  
*matrice di Hadamard*

ed un intero  $n$  tale che esiste una matrice di Hadamard  $n \times n$  si chiama  
*numero di Hadamard.*

La proprietà che  $H \cdot H^T = nI_n$  equivale evidentemente al fatto che  $H/\sqrt{n}$  è una matrice ortogonale, cioè a colonne ortonormali (ovvero ortogonali e di norma 1).

Dalla disuguaglianza di Hadamard:

$$| \text{Det}(B) | \leq \prod_i \| \underline{b}_i \|$$

si ricava che una matrice complessa  $n \times n$  a coefficienti di modulo  $\leq 1$  ha il modulo del determinante  $\leq \sqrt{n}^n$ , perché ogni colonna ha la norma euclidea  $\leq \sqrt{n}$ .

Quindi il determinante massimo in modulo cercato da Hadamard si ottiene con una matrice di Hadamard  $n \times n$ , per la quale vale l'uguaglianza:

$$| \text{Det}(H) |^2 = \text{Det}(H \cdot H^T) = \text{Det}(nI_n) = n^n.$$

Vediamo ora le proprietà delle scacchiere egualitarie, ovvero delle matrici di Hadamard, che abbiamo utilizzato nel paragrafo precedente.

(I) Permutando le righe o le colonne di una matrice di Hadamard  $H$ , si ottiene ancora una matrice di Hadamard.

Se  $P$  denota una matrice di permutazione, per cui vale  $PP^T = I_n$ , si ha:

$$(PH)(PH)^T = PHH^TP^T = PnI_nP^T = nI_n \quad ; \quad (HP)(HP)^T = HPP^TH^T = HH^T = nI_n$$

(II) Cambiando di segno una riga od una colonna di una matrice di Hadamard  $H$ , si ottiene ancora una matrice di Hadamard.

Se  $E$  denota la matrice simmetrica elementare  $E_i(-1)$ , per cui vale  $EE = I_n$ , si ha:

$$(EH)(EH)^T = EHH^TE = EnI_nE = nI_n \quad ; \quad (HE)(HE)^T = HEEH^T = HH^T = nI_n$$

(III) Data una matrice di Hadamard  $n \times n$   $H$ , il metodo di Sylvester produce una matrice di Hadamard  $2n \times 2n$ .

$$\begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H^T & H^T \\ H^T & -H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2H \cdot H^T & O \\ O & 2H \cdot H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2nI_n & O \\ O & 2nI_n \end{bmatrix} = 2nI_{2n}$$

Paley, a ciò forse indotto dai suoi risultati che vedremo tra poco, scrisse nel 1933:

*“It seems probable that, whenever  $n$  is divisible by 4, it is possible to construct an orthogonal matrix of order  $n$  composed of  $\pm 1$ , but the general theorem has every appearance of difficulty.”*

Viene quindi formulata quella che è chiamata:

**CONGETTURA DI HADAMARD.** *Per ogni intero positivo  $n$  multiplo di 4 esiste una matrice di Hadamard di ordine  $n$ .*

Tale congettura non è stata a tutt'oggi provata; vediamone i primi sviluppi. I primi interi multipli di 4 non coperti dal risultato di Sylvester sono 12 e 20.

Fu merito di Hadamard quello di provare l'esistenza di matrici di ordine 12 e 20, introducendo la tecnica dell'uso di permutazioni cicliche, che avrebbe nel seguito dato altri frutti importanti.



## MATRICE 12 x 12 COSTRUITA DA HADAMARD

$$\mathbf{H}_{12} = \begin{array}{cccc}
 & \mathbf{U} & \mathbf{E}_3\mathbf{U} & \mathbf{E}_2\mathbf{U} & \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{U} \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \\
 & \mathbf{UE}_1 & \mathbf{C} & \mathbf{C} & -\mathbf{C} \\
 \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \\
 & \mathbf{UE}_2 & \mathbf{C} & \mathbf{CP} & -\mathbf{CP}^T \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \\
 & \mathbf{UE}_3 & \mathbf{C} & \mathbf{CP}^T & -\mathbf{CP} \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}
 \end{array}$$

La matrice è suddivisa in 16 blocchi 3x3, denotati col simbolo sopra, che si ottengono dal blocco  $\mathbf{U}$  e dal blocco *circolante*  $\mathbf{C}$  moltiplicati per opportune matrici 3x3.

Le matrici moltiplicatrici 3x3 sono:  $E_1, E_2, E_3, P, -P, P^T, -P^T$ , dove:

$$\begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 & P \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Per verificare che  $H_{12}$  è matrice di Hadamard, si possono fare 66 prodotti vettoriali delle righe, oppure si può verificare che  $H_{12} \cdot H_{12}^T = 12 I_{12}$  :

$$\begin{bmatrix} U & E_3U & E_2U & E_3E_2U \\ UE_1 & C & C & -C \\ UE_2 & C & CP & -CP^T \\ UE_3 & C & CP^T & -CP \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & E_1U & E_2U & E_3U \\ UE_3 & C & C & C \\ UE_2 & C & P^TC & PC \\ UE_2E_3 & -C & -PC & -P^TC \end{bmatrix} = 12 I_{12}$$

E.g., il blocco (1,1) nel prodotto è:  $U^2 + E_3U^2E_3 + E_2U^2E_2 + E_3E_2U^2E_2E_3 = 12 I_3$

il blocco (1,2) nel prodotto è:  $UE_1U + E_3UC + E_2UC - E_3E_2UC = O_3$ .

Non che i calcoli si semplifichino molto, ma questo metodo ha suggerito un approccio che funziona in casi molto più complicati.