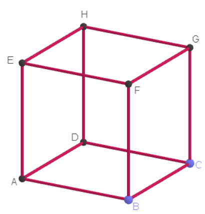
# $37^{a}$ Gara Matematica "Città di Padova"

6 aprile 2024

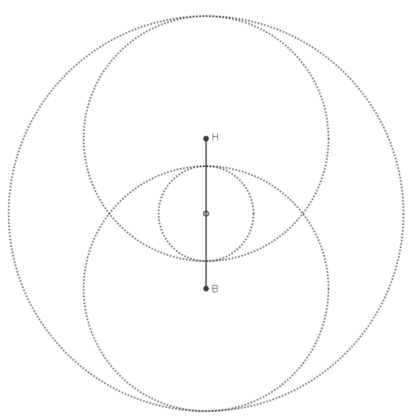
## Soluzioni

*Patavina Mathesis*

(1) Preso un cubo come quello in figura di lato 1, si costruiscano due sfere: $\Gamma_1$ di centro $B$ passante per $D$ e $\Gamma_2$ di centro $H$ passante per $F$. Si determinino i raggi delle due sfere che hanno come centro il centro del cubo e che sono tangenti sia a $\Gamma_1$ che a $\Gamma_2$.




*Soluzione.* Il raggio di ognuna delle due sfere $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ è uguale a $\sqrt{2}$ (dato $BD$ e $HF$ sono diagonali di due facce del cubo unitario), mentre la diagonale $BH$ del cubo, usando il teorema di Pitagora, è lunga $\sqrt{BD^2+DH^2}=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}=\sqrt{3}$.




Il diametro della sfera tangente più piccola è

$$\sqrt{3}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

ovvero la differenza tra la lunghezza della diagonale $BH$ e le lunghezze delle due porzioni di essa esterne a $\Gamma_1$ e a $\Gamma_2$ rispettivamente, da cui segue che il suo raggio è $\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Il diametro della sfera tangente più grande si ottiene invece sommando la lunghezza della diagonale $BH$ ai raggi di $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, ovvero esso è $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$. Il relativo raggio è dunque $\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) Siano $x_1, \cdots, x_n$ $(n \geq 2)$ numeri reali tali che

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

Si dimostri che $x_1 = x_2 = .... = x_n$.

*Soluzione* Da

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^n = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

moltiplicando per 2 entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_n^n = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n + 2x_nx_1$$

da cui segue che

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + ...+$$
$$+x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}x_n + x_n^2 + x_n^2 - 2x_nx_1 + x_1^2 = 0$$

cioé

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + .... + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 = 0$$

Dato che tutti i quadrati di numeri reali sono $\geq 0$, concludiamo che

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = ... = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1 = 0$$

ovvero che

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n.$$

(3) Nell'isola di cavalieri e furfanti ci sono solo due tipi di persone: i cavalieri che dicono sempre la verità e i furfanti che mentono sempre. Si forma una fila infinita di abitanti dell'isola in cui le persone sono numerate in ordine con 1,2,3,4,... e così via. Sia $k \geq 0$ un un numero naturale fissato e assumiamo che ogni persona nella fila dichiari: "Le prime $k$ persone dopo di me nella fila sono furfanti". Fissato $k$, quante sono le configurazioni di cavalieri e furfanti compatibili con queste dichiarazioni?

*Soluzione.* Consideriamo il caso $k > 0$. Date $k+1$ persone consecutive nella fila, esse devono essere $k$ furfanti e un cavaliere. Infatti non possono essere tutti furfanti, altrimenti il primo direbbe il vero, e non può esserci più di un cavaliere, perché altrimenti ci sarebbe un cavaliere che ha tra i suoi $k$ successori nella fila un altro cavaliere, contrariamente a quanto da lui affermato. In particolare, quindi, tra le prime $k+1$ persone deve esserci esattamente un cavaliere. Ora, la proprietà che abbiamo individuato impone che il resto della fila sia determinata dalle prime $k+1$

persone. Infatti il tipo della persona in un posto $n > k+1$ dipende esclusivamente dal tipo delle $k$ persone che la precedono: se tra di essi c'è un cavaliere, allora deve essere un furfante, se tra di essi non c'è un cavaliere, deve essere un cavaliere. Questo mostra anche che ognuna delle $k+1$ possibili configurazioni dei primi $k+1$ abitanti può essere estesa (in modo unico) a tutta la fila infinita. La risposta è dunque $k+1$.

Consideriamo infine il caso $k = 0$. In questo caso ogni persona dice la verità, dunque tutti devono essere cavalieri. Dunque c'è solo una configurazione compatibile con le dichiarazioni.

Quindi, qualsiasi sia $k \in \mathbb{N}$, la risposta è $k+1$.

(4) Si consideri la parola RICARICA. Qual è la probabilità che un suo anagramma non contenga due lettere consecutive uguali?

*Soluzione.* Gli anagrammi di RICARICA sono $\dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3$. Calcoliamo quanti di questi hanno almeno due lettere consecutive uguali. Per il principio di inclusione/esclusione, il numero di anagrammi con almeno due lettere consecutive uguali è dato da:

$$N = N_{AA} + N_{CC} + N_{II} + N_{RR}$$

$$-N_{AACC} - N_{AAII} - N_{AARR} - N_{CCII} - N_{CCRR} - N_{IIRR}$$

$$+N_{AACCII} + N_{AACCRR} + N_{AAIIRR} + N_{CCIIRR} - N_{AACCIIRR}$$

dove $N_{XX}$ è il numero di anagrammi in cui ci sono due X consecutive, $N_{XXYY}$ è il numero di anagrammi in cui ci sono due X consecutive e due Y consecutive, e così via.

Per calcolare quanti sono gli anagrammi con due A consecutive, trattiamo le due A consecutive come un'unica lettera **A**. Gli anagrammi di RICARICA che contengono due A consecutive sono dunque tanti quanti gli anagrammi di RIC**A**RIC, i quali sono

$$N_{AA} = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3.$$

Allo stesso modo si calcolano gli anagrammi che contengono due $C$, due $I$ e due $R$.

Per calcolare quanti sono gli anagrammi con due A consecutive e con due C consecutivi trattiamo le due A come un'unica lettera **A** e le due C come un'unica lettera **C** e calcoliamo gli anagrammi di RI**CA**RI ottenendo che

$$N_{AACC} = \frac{6!}{2!2!} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Allo stesso modo si calcolano gli anagrammi che contengono due coppie diverse di lettere consecutive uguali.

Usando la stessa tecnica si ottiene che gli anagrammi che contengono tre coppie specifiche di lettere consecutive uguali sono $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$ e che $N_{AACCIIRR} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Dunque $N = 4{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}3 - 6{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}3{\cdot}2 + 4{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3 - 4{\cdot}3{\cdot}2 = 4!{\cdot}(105-45+10-1) = 4!{\cdot}69$.

La probabilità che un anagramma abbia almeno due lettere consecutive uguali è dunque $\frac{4! \cdot 69}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{69}{105} = \frac{23}{35}$, da cui segue che la probabilità cercata è $\frac{12}{35}$.

(5) Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $P(7) = P(-7)$, $P(14) = P(-14)$ e $P(21) = P(-21)$. Dimostrare che per ogni numero naturale $n$ i numeri naturali $P(n)$ e $P(-n)$ hanno lo stesso resto nella divisione per 6.

*Soluzione.* Si consideri il polinomio $P(x) - P(-x)$. Per ipotesi esso ha tra le sue radici $7, 14, 21$. Dunque esiste un polinomio a coefficienti interi $Q(x)$ tale che

$$P(x) - P(-x) = (x-7)(x-14)(x-21)Q(x)$$

Sia ora $n$ un numero naturale. Allora

$$\begin{aligned} n - 7 &\equiv n - 1 \,(mod\, 6) \\ n - 14 &\equiv n - 2 \,(mod\, 6) \\ n - 21 &\equiv n - 3 \,(mod\, 6) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$P(n) - P(-n) \equiv (n-1)(n-2)(n-3)Q(n) \,(mod\, 6)$$

Dato che $n-1$, $n-2$ e $n-3$ sono tre numeri consecutivi, uno di essi deve essere un multiplo di 3 e almeno uno di essi deve essere pari. Pertanto $(n-1)(n-2)(n-3) \equiv 0 \,(mod\, 6)$. Ne segue che $P(n) - P(-n) \equiv 0 \,(mod\, 6)$, dunque $P(n)$ e $P(-n)$ hanno lo stesso resto nella divisione per 6.

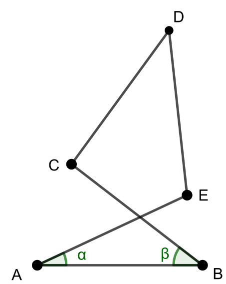
(6) Fissato un numero naturale $n \geq 3$ si consideri la successione di numeri naturali $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 := n \\ a_{m+1} := d(a_m) \text{ per ogni } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dove per ogni numero naturale $a$, $d(a)$ indica il numero di numeri naturali divisori di $a$ (per esempio $d(6) = 4$ dato che 6 ha come divisori 1, 2, 3 e 6). Dimostrare che, qualsiasi sia il numero naturale $n \geq 3$, la successione $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ contiene sempre un numero primo dispari.

*Soluzione.* Iniziamo con l'osservare che se $k \in \mathbb{N}$ è maggiore di 2, $k - 1 > 1$ e non è un divisore di $k$. Dunque possiamo concludere che $d(k) < k$ per ogni $k > 2$, mentre $d(2) = 2$ e $d(1) = 1$. Da questo segue che $a_{m+1} \leq a_m$ per ogni numero naturale $m$. Ma, dato che la successione $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è composta di numeri naturali, essa non può essere strettamente decrescente, dunque ad un certo punto deve raggiungere il valore 2 o 1 e quindi diventare costante da quel punto in poi. Tuttavia il valore 1 può essere raggiunto solo da 1 stesso (è l'unico numero che ha un solo divisore). Dunque se partiamo da un valore $n \geq 3$ la successione deve raggiungere ad un certo punto il valore 2. Sia $\overline{m}$ il più piccolo indice tale che $a_{\overline{m}} = 2$. Necessariamente $\overline{m} > 0$ (dato che $n > 2$). Si consideri $a_{\overline{m}-1}$: tale numero deve avere esattamente due divisori; questo significa che esso è un numero primo e, dato che deve essere maggiore di 2, esso è dispari.

(7) Sia $ABCDE$ un pentagono equilatero intrecciato come quello in figura. Determinare per quali angoli $\alpha$ e $\beta$, sia i vertici $A$, $C$, $D$ che i vertici $B$, $E$, $D$ sono allineati.




*Soluzione* Dobbiamo individuare gli angoli $\alpha$ e $\beta$ per i quali il triangolo $ABD$ contiene il punto $C$ è nel lato $AD$ e il punto $E$ nel lato $BD$. Assumiamo quindi che tali condizioni valgano.

I triangoli $AED$ e $BCD$ sono congruenti. Infatti $DE = EA = BC = CD$ per ipotesi, da cui segue in particolare che $AED$ e $BCD$ sono triangoli isosceli, e inoltre $A\hat{D}E = C\hat{D}B$.

Dato che $AD = BD$, il triangolo $ADB$ è isoscele; dunque $D\hat{A}B = D\hat{B}A$. Ma $D\hat{A}E = D\hat{B}C$, dunque $\alpha = D\hat{A}B - D\hat{A}E = D\hat{B}A - D\hat{B}C = \beta$.

Indichiamo con $\gamma$ l'angolo $A\hat{D}B = D\hat{A}E = C\hat{B}D$. Dato che $EAB$ è isoscele ($AE = AB$ per ipotesi), abbiamo che $A\hat{E}B = A\hat{B}C + C\hat{B}E = \alpha + \gamma$, da cui segue (facendo la somma degli angoli di $EAB$) che

$$3\alpha + 2\gamma = 180^{\mathrm{o}}$$

Inoltre considerando la somma degli angoli di $ADB$ si ottiene che

$$3\gamma + 2\alpha = 180^{\mathrm{o}}.$$

Da queste due identità segue che

$$3\alpha + 2\gamma = 3\gamma + 2\alpha$$

da cui segue che $\alpha = \gamma$. Dunque

$$180^{\mathrm{o}} = 3\alpha + 2\gamma = 5\alpha$$

da cui segue che $\alpha = 36^o$.

(8) Una piccola torre è composta inizialmente di 15 blocchi a forma di parallelepipedo disposti inizialmente in 5 strati di tre blocchi ciascuno con orientamento alternato come in figura. Si consideri il seguente celebre gioco. Si parte dalla situazione iniziale e ogni giocatore deve rimuovere a turno un pezzo dalla torre e poi posizionarlo sul piano più alto della torre dove ci sia uno spazio disponibile (mantenendo l'alternanza dell'orientamento degli strati). Chi fa crollare la torre perde. C'è inoltre una regola che vieta di estrarre un pezzo dal penultimo strato (il secondo a partire dall'alto) se l'ultimo (il primo a partire dall'alto) non è completo. Supponendo che i giocatori siano così bravi da non far mai cadere la torre, allora il gioco ad un certo punto termina perché non si possono più fare mosse. Quante sono le configurazioni finali possibili della torre?

*Soluzione.* Calcoliamo innanzitutto qual è il numero $S(n)$ di torri di $n$ pezzi realizzabili tramite strati composti da un solo pezzo centrale o da due laterali. Chiaramente, $S(0) = 1$ e $S(1) = 1$, mentre $S(n) = S(n-1) + S(n-2)$ per ogni $n \geq 2$, dato che l'ultimo strato in alto di una tale torre può avere 1 o 2 pezzi. Dunque $S(n)$ è l'$n+1$-esimo numero di Fibonacci.

Consideriamo ora una configurazione finale della torre di 15 pezzi. Osserviamo i seguenti fatti.

(a) Il penultimo strato deve essere completo. Altrimenti un pezzo dovrebbe essere stato rimosso da esso per essere messo nell'ultimo strato prima che questo fosse completato, il che è contrario ai vincoli dati dal regolamento.

(b) L'ultimo strato può avere solo uno o due pezzi. Infatti esso non può averne tre, perché in tal caso il penultimo strato dovrebbe essere incompleto (altrimenti la partita continuerebbe) e il pezzo da esso rimosso dovrebbe essere stato messo nell'ultimo strato contrariamente ai vincoli dati dal regolamento (sarebbe stato rimosso quando l'ultimo strato era incompleto).

Pertanto, gli ultimi due strati della torre contengono rispettivamente 3 e 2 pezzi, oppure 3 e 1 pezzo.

Nel primo caso, ognuno degli strati inferiori deve essere composto da un pezzo centrale o da due laterali. In tutto, abbiamo $S(10) \cdot 3$ torri di questo tipo, per quanto dimostrato nella prima parte della soluzione e per il fatto che ci sono 3 modi di disporre i due pezzi dello strato più alto.

Nel secondo caso invece il terzultimo strato deve contenere necessariamente due pezzi laterali (non può contenerne tre perché si potrebbe in quel caso continuare il gioco e non può contenerne solo uno, perché altrimenti, immaginando di tornare indietro di due mosse, un pezzo del penultimo strato sarebbe provenuto da esso, contro il regolamento). Ognuno degli strati inferiori al terzultimo deve infine essere composto da un pezzo centrale o da due laterali. In tutto, abbiamo dunque $S(9) \cdot 3$ torri di questo tipo, per quanto dimostrato nella prima parte della soluzione e per il fatto che ci sono 3 modi di disporre l'unico pezzo dello strato più alto.

Dunque in totale le configurazioni considerate sono $(S(9)+S(10)) \cdot 3 = S(11) \cdot 3 = 144 \cdot 3 = 432$.

Per concludere dobbiamo dimostrare che ognuna di queste configurazioni proviene effettivamente da una partita. Per farlo, basta notare che partendo da una delle configurazioni che abbiamo considerato possiamo tornare alla torre iniziale fatta di cinque strati completi se spostiamo via via i pezzi dallo strato più alto negli spazi liberi più alti disponibili. Le inverse di tali operazioni non violano mai la regola del penultimo strato, perché ogni pezzo viene sempre spostato sotto un numero positivo di strati completi.